L^P-RUIMTEN GEASSOCIEERD AAN VON NEUMANN ALGEBRAS

By
Vandebril Raphael

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
AT
DALHOUSIE UNIVERSITY
HALIFAX, NOVA SCOTIA
MAY 2004

© Copyright by Vandebril Raphael, 2004

L^p-ruimten geassocieerd aan von Neumann algebras

Vandebril Raphael

29 Oktober 99

Voorwoord

Het zou onrechtvaardig zijn mocht ik deze pagina niet benutten om een aantal mensen te bedanken. In de eerste plaats acht ik het nodig om sommigen te bedanken, omdat dit eindwerk niet door 1 persoon gemaakt is, er zijn namelijk vele mensen die hun steentje bijgedragen hebben tot deze thesis. Hun bijdrage kan zowel praktisch als steunend geweest zijn. Want zelfs een eenvoudig schouderklopje kan deugd doen, wanneer het zoeken naar een bewijs of het geklungel met LaTeX me echt te veel werd. Daarom is het zeker de moeite waard om deze mensen, die de drijvende kracht aachter mijn thesis waren te vermelden.

In de eerste plaats wil ik vooral mijn promotor Prof. dr. J. Quaegebeur vermelden, omdat zijn deur altijd voor mij openstond en hij mij ook vaak verder heeft geholpen, wanneer ik gestrand was bij een of ander probleem.

Mijn ouders verdienen vast en zeker ook een plaatsje in dit voorwoord, omdat zij het het in de eerste plaats mogelijk gemaakt hebben dat ik deze studies kon aanvangen. Zonder hen zou er van dit eindwerk nooit sprake geweest zijn.

De ganse onderzoeksgroep analyse moet hier ook vermeld worden, vooral omdat het zo'n aangename groep was, waar er interesse bleek te zijn voor wat ik deed, ik heb dan ook geregeld met sommige assistenten een babbeltje geslagen over het verloop van mijn thesis. En ik dank hen ook voor de soms nuttige tips die ze mij gegeven hebben.

Ik moet zeker en vast ook al mijn medestudenten bedanken, voor al de kleine nuttige tips, voor het oprichten van de LaTeX-problemen website, om ons zo toch allemaal op de hoogt te houden, van onze nieuwste ontwikkelingen in LaTeX. En vooral dank ik ook aan hen het plezier dat ik gedurende deze vier jaar durende studies beleefd heb.

Als laatste moet ik nog alle mensen bedanken, die op de een of andere manier een bijdrage aan mijn thesis geleverd hebben, en die ik jammer genoeg vergeten te vermelden ben in dit dankwoord.

Raf

1999-2000

Inhoudsopgave

Voorwoord **i**

Inleiding **v**

1 Meetbare operatoren **1**
1.1 Definities en eigenschappen 1
1.1.1 Topologieën op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 1
1.1.2 von Neumann-algebras 2
1.1.3 Meer topologie 3
1.1.4 Gewichten op von Neumann-algebras 4
1.2 eigenschappen over onbegrensde operatoren 5
1.2.1 Som en produkt van operatoren 5
1.2.2 De hermitische toevoeging van onbegrensde operatoren 5
1.2.3 De drager van een operator 7
1.2.4 Polaire decompositie 7
1.2.5 De spectrale decompositie van een operator 7
1.2.6 De norm op een operator 9
1.2.7 Het geaffilieerd zijn 9
1.3 Eigenschappen van projectieoperatoren 11
1.3.1 Doorsnede en Unie van projectieoperatoren 11
1.3.2 equivalentie van projectieoperatoren 11
1.4 τ-meetbare operatoren 13
1.5 De von Neumann-algebra L^∞ met spoor. 14
1.5.1 het gewicht op $L^\infty(X,\mu)$ 18
1.6 $M_n(\mathbb{C})$ met het gewone spoor 21
1.6.1 $M_n(\mathbb{C})$ vormt een von Neumann-algebra 21
1.6.2 De eigenschappen van $tr(.)$ op $M_n(\mathbb{C})$ 21
1.7 De theorie van de τ-meetbare operatoren 23
1.7.1 Inleiding 23
1.7.2 De $D(\epsilon,\delta)$ verzameling van operatoren. 24
1.7.3 τ-dichte deelruimten 27
1.7.4 τ-pré-meetbaarheid 30
1.7.5 Bewijs van de Stelling 1.28 33
1.8 Algemene voorbeelden 37
1.9 Toepassing op $M_n(\mathbb{C})$ en $L^\infty(X,\mu)$. 38
1.9.1 $M_n(\mathbb{C})$ met het gewone spoor 38
1.9.2 Meetbare operatoren van $L^\infty(X,\mu)$ 38

1.10 Meetbare operatoren en meetbare functies 46

2 $L^p(M)$ voor een spoor **48**
2.1 Inleidende begrippen 48
2.1.1 Convergentie τ-b.o. 48
2.1.2 Toepassing op $L^\infty(X,\mu)$. 49
2.1.3 Elementaire operatoren 53
2.1.4 Kleine notie over de uitbreiding van het spoor τ. 55
2.2 De definitie van de $L^p(M)$-ruimten 56
2.2.1 De definitie van $L^1(M)$ 56
2.2.2 De $L^1(M)$-ruimte in het klassieke geval. 62
2.2.3 De definitie van de $L^p(M)$-ruimten 64
2.2.4 Het algemene geval 65
2.2.5 Hoofdresultaat van dit hoofdstuk 66
2.3 De herschikking (rearrangement) van een operator 66
2.3.1 Enkele nieuwe soorten operatoren 66
2.3.2 Toepassing op $L^\infty(\mathbb{R}^+,\mu)$. 70
2.3.3 De definitie van een rearrangement 71
2.3.4 Eigenschappen van rearrangements 74
2.4 Verschillende soorten van convergentie 82
2.5 De ongelijkheden 83
2.5.1 De Hölder-ongelijkheid 84
2.5.2 Alternatieve definitie voor de norm 91
2.5.3 De Minkowski-ongelijkheid 93
2.6 Bewijs van het hoofdresultaat 93
2.7 Enkele voorbeelden 95
2.7.1 De von Neumann-algebra $M_n(\mathbb{C})$ 95
2.7.2 De von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ met een spoor 95
2.8 dualiteit 95

3 $\mathbf{L^p}$-ruimten **98**
3.1 Inleidende begrippen 99
3.1.1 De modulaire automorfisme groep $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_t$ 99
3.1.2 Voorbeeld van een modulaire automorfisme groep 99
3.1.3 Het gekruist produkt 101
3.1.4 Het unitair cocykel theorema 101
3.1.5 Lineaire vormen op M 102
3.1.6 Het uitgebreid positief deel 103
3.1.7 Voorbeelden van uitgebreide positieve delen. 106
3.2 Het duale gewicht op gekruiste produkten 108
3.2.1 De constructie 108
3.2.2 Uitbreiding van de duale aktie 112
3.3 Het spoor τ op $N = R(M,\sigma_t^{\varphi_0})$. 114
3.3.1 τ definieert een spoor. 115
3.3.2 Eigenschappen i.v.m. het spoor τ 116
3.4 De τ meetbare operatoren op N 117
3.4.1 Relatie tussen meetbare operatoren op N en gewichten op M . . 118
3.4.2 Aanpassing van propositie 3.21 120

3.5 De definitie en eigenschappen van $L^p(M)$ 122
3.6 De norm op $L^p(M)$ 124
3.6.1 Definitie van de norm op $L^p(M)$ 124
3.6.2 De spoortopologie op $L^p(M)$ 126
3.6.3 De Hölder-ongelijkheid 127
3.6.4 De Minkowski-ongelijkheid 135
3.7 De L^p ruimten vormen Banachruimten 136
3.8 De constructie is onafhankelijk van het gekozen gewicht. 136
3.8.1 Een isomorfisme tussen N_0 en N_1. 137
3.9 Het semi-eindige geval 140
3.9.1 Het gekruiste produkt 141
3.9.2 De duale aktie θ 143
3.9.3 Het spoor τ 144
3.9.4 De $L^p(M)$-ruimten 145
3.10 Dualiteit 148

Nawoord **149**

Bibliography **150**

Inleiding

De titel "L^p-ruimten geassocieerd aan von Neumann-algebras "zegt op zich natuurlijk niet zoveel over deze verhandeling. Waar het in feite om gaat is dat er in dit thesiswerk een algemene methode wordt gegeven, om van bepaalde (ook niet commutatieve von Neumann-algebras) tot een L^p-ruimte te komen. In essentie gaan we hier in feite zoeken naar een mogelijke uitbreiding van de L^p-ruimten zoals we die kennen uit het klassieke geval. We gaan ons dan ook bij elke stap afvragen wat het verband gaat zijn met de klassieke situatie, om zo niet onmiddellijk te abstract te worden, en toch een beetje voeling met een gekend begrip te onderhouden. Omdat een beperking tot het voorbeeld van de klassieke L^p-ruimten te restrictief zou zijn, gaan we ook een niet commutatief voorbeeld op de voet volgen, met name de matrices, die ook perfect in dit kader zullen passen. Zodoende komen we tot een mooie algemene theorie, waarin de matrices en de klassieke L^p-ruimten mooi zullen inpassen.

Het eerste hoofdstuk legt de basis van het ganse werk, er worden een aantal belangrijke inleidende begrippen uit de doeken gedaan, zoals de definities van von Neumann-algebras , topologieën daarop, gewichten op von Neumann-algebras , eigenschappen over begrensde en onbegrensde operatoren, ... Om het geheel niet al te abstract te maken, worden belangrijke bgrippen, aan de hand van concrete voorbeelden verduidelijkt. Vooral de matrices $M_n(\mathbb{C})$ en de klassieke functieruimten $L^\infty(X,\mu)$ blijken de begrippen mooi te illustreren. $M_n(\mathbb{C})$ kunnen we beschouwen als een von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $\mathbb{C}^n$ en $L^\infty(X,\mu)$ blijkt, mits een aantal restricties op de maatruimte (X,Ω,μ) isomorf te zijn met een von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $L^2(X,\mu)$. Verder construeren we dan voor een bijzonder gewicht τ (nl. een spoor) op de von Neumann-algebra M, de verzameling van τ-meetbare operatoren geassocieerd aan M. Als hoofdresultaat van hoofdstuk 1, wordt dan aangetoond dat deze verzameling van operatoren (genoteerd met $\tilde{M}$) een volledige, topologische vectorruimte zal vormen. Als laatste punt in dit hoofdstuk berekenen we dan ook voor enkele concrete gevallen deze verzameling $\tilde{M}$.

Nu hebben we voldoende voorkennis om over te gaan tot de daadwerkelijke constructie van de L^p-ruimten. We gaan vertrekkende van een von Neumann-algebra M, waarop een semi-eindig, normaal en trouw gewicht φ ligt (deze eigenschappen worden in hoofdstuk 1 nader toegelicht) proberen te komen tot een vectorruimte $L^p(M)$ die volledig zal zijn voor de norm $\|\,.\,\|_p$.

In hoofdstuk 2 behandelen we eerst nog een meer specifiek geval, namelijk voor een von Neumann-algebra waarop een semi-eindig, normaal en trouw spoor τ ligt. (een spoor is een gewicht met één bijkomende eigenschap) Dit hoofdstuk gaat in feite

een rechtstreekse uitbreiding zijn van het klassieke geval, de opbouw gaat volledig analoog verlopen, en zodoende wordt er een constante verwijzing naar het klassieke geval onderhouden.

De meest essentiële stap in dit hoofdstuk gaat de constructie van de $L^1(M)$-ruimte zijn, om deze te definiëren worden dan ook een aantal nieuwe begrippen, zoals elementaire operatoren, convergentie τ-b.o. in het leven geroepen.

Als tweede belangrijkste punt in dit hoofdstuk kunnen we ook het bewijs van de driehoeksongelijkheid vermelden. Om dit aan te tonen gebruiken we namelijk niet het traditionele drie lijnen theorema uit de complexe analyse. Maar we gaa aan elke τ-meetbare operator een reeële functie (nl. de rearrangement) associëren. Deze functie gaat bijzonder zijn omdat ze een verband gaat geven tussen de L^p-norm van de operator en de klassieke L^p-norm van de rearrangement als reële functie. Zodoende kunnen we de Hölder ongelijkheid voor de L^p-norm op de operatoren herleiden naar de klassieke Hölder-ongelijkheid. We passen deze theorie dan ook toe op de matrices en de klassiek L^p-functieruimten. Als laatste punt wordt er in dit hoofdstuk een kleine vermelding gemaakt van de dualiteit zoals we die kennen uit het klassieke geval.

Het derde en tevens laatste hoofdstuk behandelt het meest algemene geval. Hier gaan we de L^p-ruimte construeren voor een von Neumann-algebra waarop een semi-eindig, normaal en trouw gewicht φ ligt, daar waar het in hoofdstuk 2 een spoor was. Vooraleer we hier de L^p-ruimten kunnen invoeren moet de von Neumann-algebra ingebed worden in een grotere von Neumann-algebra , het zogenaamde gekruiste produkt, waarop we ook een gewicht zullen definiëren. De inbedding van M in het gekruiste produkt en de uitbreiding van de gewichten op M tot gewichten op het gekruiste produkt zijn helemaal geen triviale begrippen. Hierbij komen nog zeer veel andere zaken bij kijken, zoals, de modulaire automorfisme groep, het unitair cocykel theorema, de duale aktie, het uitgebreid positief deel, operatorwaardige gewichten e.d. Omdat het niet de bedoeling is om deze laatste begrippen tot in de details uit te werken, wordt er in de inleiding van hoofdstuk 3, enkel vermelding gemaakt van de betekenis van deze begrippen, en hun belangrijkste eigenschappen. Hier en daar worden enkele voorbeelden opgevoerd om deze vaak abstracte begrippen meer toegankelijk te maken. Deze inleiding gepasseerd zijn we klaar om tot de werkelijke constructie van de L^p-ruimten over te gaan.

We moeten hier ook opmerken dat we, in tegenstelling met het klassieke geval, de L^p-ruimten niet per p apart gaan construeren, maar door de inbedding in de grotere ruimte, gaan al de L^p-ruimten daar deel van zijn, wat zeer specifieke voordelen met zich meebrengt.

Om aan te tonen dat $\|\,.\,\|_p$ een norm zal definiëren gaan we echter niet het domein van hoofdstuk twee betreden maar gaan we gebruik maken van het drie lijnen theorema om de Hölder-ongelijkheid aan te tonen.

Als voorlaatste paragraaf in dit hoofdstuk wordt opnieuw een vergelijkende studie met het klassieke geval gemaakt, er wordt nagegaan hoe we dat in deze bredere context kunnen inpassen. We besluiten dit hoofdstuk analoog als hoofdstuk 2 met een kleine vermelding van de dualiteit.

Hoofdstuk 1

Meetbare operatoren, vertrekkende van een spoor

In dit hoofdstuk vertrekken we van een spoor τ op een von Neumann algebra M en construeren zo de verzameling van τ-meetbare operatoren. We verkrijgen hierbij het resultaat dat deze verzameling een volledige topologische *-algebra gaat vormen. Vooraleer we met de belangrijke resultaten in huis vallen volgt hier eerst een inleidende paragraaf.

1.1 Definities en eigenschappen van von Neumann algebras en gewichten.

1.1.1 Topologieën op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Wanneer we $\mathcal{H}$, $< .,. >$ als complexe Hilbertruimte beschouwen, (d.w.z. dat $\mathcal{H}$ als complexe vectorruimte volledig is voor de norm $\| \, . \, \| = \sqrt{< \, . \, , \, . \, >}$, (geïnduceerd door het inprodukt). Dan noteren we met $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de verzameling van de begrensde (=continue) operatoren van $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$.

Op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zijn er een vijftal vaak gebruikte topologieën, vooraleer we de definitie van een von Neumann-algebra geven zal ik kort deze topologieën toelichten, zodat we nadien een zo volledig mogelijk beeld kunnen geven van wat nu een von Neumann-algebra eigenlijk is. Voor meer info over deze topologieën en over von Neumann-algebras in het algemeen kunnen we verwijzen naar het werk van J. Dixmier ([3]).

De normtopologie ook wel de uniforme topologie genoemd: De norm op $\mathcal{H}$ definieert een norm op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ door $\|T\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|, T \in B(H)$.

De zwakke topologie Zij $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Dan is de afbeelding $T \mapsto |\langle T\xi, \eta \rangle|$ een seminorm op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De familie van al deze semi-normen bepaalt een Hausdorff lokaal convexe topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dit is de zogenaamde zwakke topologie. Dit is ook de zwakste topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ waarvoor de afbeeldingen $T \mapsto |\langle T\xi, \eta \rangle|$ van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in $\mathbb{C}$ continu zijn.

De sterke topologie Zij $\xi \in \mathcal{H}$. Dan definieert de afbeelding $T \mapsto \|T\xi\|$ een semi-norm op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De familie van al deze semi-normen bepaalt dan een Hausdorff lokaal convexe topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Het is de zwakste topologie waarvoor de afbeeldingen $T \mapsto T\xi$ van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ naar $\mathcal{H}$ continu zijn.

De σ-zwakke topologie Zij $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ twee rijen in $\mathcal{H}$ zodat voor deze rijen: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < +\infty$ en $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\eta_n\|^2 < +\infty$. Dan definieert de afbeelding $T \mapsto |\sum_{n\in\mathbb{N}} < T\xi_n, \eta_n >|$ een semi-norm op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De verzameling van al deze semi-normen bepaalt een Hausdorff lokaal convexe topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die we de σ-zwakke topologie noemen. Dit is ook de zwakste topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ waarvoor de afbeeldingen $T \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} < T\xi_n, \eta_n >$ van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ naar $\mathbb{C}$ continu zijn.

De σ-sterke topologie Zij $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathcal{H}$ zodat $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < +\infty$. Dan definieert de afbeelding $T \mapsto (\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T\xi_n\|^2)^{1/2}$ een semi-norm op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De verzameling van al deze semi-normen bepaalt een Hausdorff lokaal convexe topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die we de σ-sterke topologie noemen. Dit is ook de zwakste topologie op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ waarvoor de afbeeldingen $T \mapsto (T\xi_1, T\xi_2, \ldots)$ van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in de directe som $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots$ continu zijn met $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathcal{H}$ zodat $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < +\infty$.

Tussen de topologieën heerst de volgende orde, duiden we hierbij met $<$ aan dat de topologie links hiervan fijner is dan de topologie daar rechts van.

$$\begin{array}{ccccc} \text{De Normtopologie} & < & \sigma\text{-Sterke topologie} & < & \text{Sterke topologie} \\ & & \wedge & & \wedge \\ & & \sigma\text{-Zwakke topologie} & < & \text{Zwakke topologie} \end{array}$$

1.1.2 von Neumann-algebras

In dit stukje geven we de algebraïsche en de topologische definitie van een von Neumann-algebra . In het volgende stuk leggen we dan het verband met de andere topologieën en geven we nog enkele equivalente representaties voor een von Neumann-algebra .

Stel M als deelverzameling van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, M' wordt dan de commutant van M genoemd en bevat alle elementen uit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die commuteren met elk element uit M. $(M')' = M''$ en wordt de bi-commutant van M genoemd.

$$M' = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, \forall x \in M : xy = yx\}.$$

Als M een zelftoegevoegde deelalgebra is (d.w.z. gesloten voor het nemen van het toegevoegde $x \mapsto x^*$) dan zal ook M' zelftoegevoegd zijn.

Definitie 1.1 *Een von Neumann-algebra M is een zelftoegevoegde deelalgebra van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zodanig dat M gelijk is aan zijn bi-commutant, dus $M = M''$.*

M^+ is de verzameling van zelftoegevoegde elementen uit M waarvoor het spectrum ≥ 0 is en wordt het positieve deel van M genoemd (cfr. ook paragraaf 1.2.5), op deze verzameling gaan we later een gewicht definiëren. We kunnen een von Neumann-algebra echter ook op een andere meer topologische manier karakterizeren. Meer info daarover is terug te vinden in ([8], 1).

Definitie 1.2 *Een *-deelalgebra van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die gesloten is voor de zwakke o- perator topologie en die de eenheid bevat wordt een von Neumann-algebra genoemd.*

Omdat de zwakke topologie zwakker is dan de norm topologie zal een von Neumann-algebra zeker ook gesloten zijn voor de norm-topologie. In het bijzonder is een von Neumann-algebra dus altijd een C*-algebra. We beschrijven hier nu nog kort wat een C^*-algebra is en geven ook de belangrijkste eigenschappen van de hermitische toevoeging.

Definitie 1.3 *Een Banachalgebra $\mathcal{A}$ is een associatieve, complexe algebra, voorzien van een norm $\|.\| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, zodat $\mathcal{A}$ een Banachruimte vormt en*

$$\forall x, y \in \mathcal{A} : \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Definitie 1.4 *Een involutie op $\mathcal{A}$ is een afbeelding*

$$.^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : x \mapsto x^*$$

zodat
$i.x^{**} = x$
$ii.(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
$iii.(x + y)^* = x^* + y^*$
$iv.(xy)^* = y^* x^*$
en dit voor elke $x, y \in \mathcal{A}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definitie 1.5 *Een Banachalgebra met een involutie noemt men een Banach *-algebra. Als deze Banach *-algebra nog aan de volgende eis:*

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

voldoet wordt dit een C^*-algebra genoemd.

Nog een laatste resultaat dat het verband legt tussen de twee bovenstaande definities voor een von Neumann-algebra . In het algemeen zal voor $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ S'' de kleinste von Neumann-algebra zijn die S omvat (als S zelftoegevoegd is) , in het bijzonder zal $S'' = S^{-\omega}$, de zwakke sluiting van S zijn(als S reeds een *-deelalgebra met eenheid is van $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).

1.1.3 Meer topologie

Stelling 1.6 *Zij M een $^* -$ algebra van operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dan zijn de volgende voorwaarden equivalent:*
i. M is zwak gesloten.
ii. M is sterk gesloten.
iii. M is σ-zwak gesloten.
iv. M is σ-sterk gesloten.

Gevolg 1.7 *Zij M een $^* -$ algebra van operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zo dat $1_{\mathcal{H}} \in M$, dan is M'' (dat is de kleinste von Neumann-algebra voortgebracht door M), gelijk aan de sluiting van M in de zwakke, sterke, σ-zwakke of σ-sterke topologie.*

Gevolg 1.8 *Zij M een *-algebra van operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zo dat $1_\mathcal{H} \in M$. De nodige en voldoende voorwaarde opdat M een von Neumann-algebra is, is dat M gesloten is in de zwakke, sterke, σ-zwakke of σ-sterke topologie.*

1.1.4 Gewichten op von Neumann-algebras

Definitie 1.9 *Een gewicht op een von Neumann-algebra M is een afbeelding $\phi : M^+ \to [0, +\infty]$ met volgende eigenschappen:*
i. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad x, y \in M^+$
ii. $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x) \quad \lambda \geq 0, \ \ x \in M^+$

Nog enkele belangrijke begrippen:

- Een spoor op een von Neumann algebra M is een gewicht, zodanig dat

  $$\phi(uTu^*) = \phi(T) \quad T \in M^+, \quad u \textit{ is een unitaire operator in } M$$

  De nodige en voldoende voorwaarde opdat een gewicht een spoor zou definiëren. is dat

  $$\phi(a\, a^*) = \phi(a^*\, a) \ \forall a \in M$$

- En gewicht ϕ wordt trouw genoemd als

  $$\phi(x^*x) = 0 \quad \textit{met } x \in M \textit{ impliceert dat } x = 0$$

- Een gewicht ϕ noemt men normaal als

  $$\phi(\sup_i x_i) = \sup_i \phi(x_i)$$

  voor elk begrensd stijgend net $(x_i)_i$ in M^+.

- Een gewicht ϕ wordt semi-eindig genoemd als

  $$n_\phi = \{x \in M \mid \phi(x^*x) < +\infty\}$$

  σ-sterk dicht is in M.

In het bijzonder moeten we nog volgende opmerking maken (cfr. [2] hfdst 4.) Dat voor een semi-eindig gewicht ϕ geldt dat n_ϕ σ-sterk dicht is in M als en slechts als n_ϕ σ-zwak dicht is in M.

Analoog als bij de operatoren kunnen we bij de gewichten een polaire decompositie beschouwen (cfr. [3]). Zij M een von Neumann-algebra en zij φ een gewicht op deze von Neumann-algebra . Dan bestaat er:

1. Een paar (ϕ, u) met de volgende eigenschappen:
   - ϕ is een normale positieve vorm op M en $\|\varphi\| = \|phi\|$.
   - u is een partiële isometrie van M met als finale projectie de drager van ϕ.
   - $\varphi = \phi\,.u$ en $\phi = \varphi\,.u^*$.

2. Deze ϕ en u zijn uniek

Deze ϕ noteren we als $|\varphi|$.

Definitie 1.10 *Een von Neumann-algebra M wordt semi-eindig genoemd als voor elke niet nulle $T \in M^+$ er een semi-eindig, normaal spoor ϕ op M bestaat zodanig dat $\phi(T) \neq 0$.*

1.2 eigenschappen over onbegrensde operatoren

1.2.1 Som en produkt van operatoren

Analoog als voor lineaire operatoren a en b op $\mathcal{H}$, kunnen we ook hier de som $a+b$ en het produkt ab definiëren als operatoren op $\mathcal{H}$ met respectievelijke domeinen:

$$D(a+b) = D(a) \cap D(b)$$

$$D(ab) = \{\xi \in D(b) | b\xi \in D(a)\}$$

Deze operaties zijn associatief zodat ook $a+b+c$ en abc goed gedefinieerde operatoren zijn. Bovendien geldt er $\forall a, b, c$

$$(a+b)c = ac + bc \text{ en } c(a+b) \supseteq ca + cb$$

(Met gelijkheid als $D(c) = \mathcal{H}$).

Definitie 1.11 *Een operator a op $\mathcal{H}$ noemen we* gesloten *als zijn grafiek $G(a) = \{(a\xi, \xi) \,|\, \xi \in D(a)\}$ gesloten is in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.*

Een operator a wordt sluitbaar *genoemd als de sluiting van zijn grafiek $\overline{G(a)}$ de grafiek is van een gesloten operator, de operator horend bij deze gesloten grafiek wordt dan de sluiting van a genoemd en genoteerd met $[a]$.*

Een operator is dicht gedefinieerd *als $D(a)$ dicht is in $\mathcal{H}$.*

Definitie 1.12 *Als de som $a+b$ van twee gesloten, dicht gedefinieerde operatoren a, b sluitbaar en dicht gedefinieerd is, dan wordt de sluiting $[a+b]$* de sterke som *van a en b genoemd.*

Analoog zullen we het sterk produkt definiëren als de sluiting $[ab]$ van ab als ab sluitbaar en dicht gedefinieerd is.

1.2.2 De hermitische toevoeging van onbegrensde operatoren

We gaan in deze sectie kort de voorwaarden toelichten waaronder een onbegrensde operator hermitisch toegevoegd kan worden, we vermelden hier dan ook een aantal vaak gebruikte eigenschappen over deze toevoeging. Meer gefundeerde informatie hierover kunnen we terugvinden in ([5], IV, paragraaf 2).

Definitie 1.13 *Zij a een operator op $\mathcal{H}$ gedefinieerd op een dicht domein $D(a)$ dan definiëren we*

$$a^* : D(a^*) \to \mathcal{H}$$

door:
- $D(a^*) = \{\eta \in \mathcal{H} \mid \exists \zeta \in \mathcal{H}, \forall \xi \in D(a) :< a\xi, \eta >=< \xi, \zeta >\}$
- *Als $\eta \in D(a^*)$, stel dan $a^*\eta = \zeta$, waarbij ζ uniek bepaald is door $< a\xi, \eta >=< \xi, \zeta >$ voor alle $\xi \in D(a)$.*

Nu komen er nog enkele belangrijke vaak gebruikte eigenschappen over de hermitische toevoeging, waarvan de bewijzen ook terug te vinden zijn in ([5]).

Propositie 1.14 *Zij a, b twee dicht gedefinieerde operatoren in $\mathcal{H}$ zodat $a \subseteq b$ dan zal*

$$b^* \subseteq a^*$$

Propositie 1.15 *Zij a, b dicht gedefinieerde operatoren in $\mathcal{H}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan geldt er dat:*

i. *Als $D(a+b)$ dicht is dan is $a^* + b^* \subseteq (a+b)^*$.*

ii. *Als $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (of $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$), dan is $a^* + b^* = (a+b)^*$.*

iii. *Als $D(ab)$ dicht is, dan is $b^*a^* \subseteq (ab)^*$.*

iv. *Als $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dan is $b^*a^* = (ab)^*$.*

v. *$\overline{\lambda}a^* = (\lambda a)^*$ voor $\lambda \neq 0$.*

Stelling 1.16 *Als a een dicht gedefinieerde operator is dan is a^* gesloten.*

Stelling 1.17 *Zij a een dicht gedefinieerde operator in $\mathcal{H}$.*
Dan is a sluitbaar a.s.a. a^* dicht gedefinieerd is.
Indien a sluitbaar is, dan is zijn sluiting gegeven door a^{**}.

Propositie 1.18 *Zij a een dicht gedefinieerde operator. Dan is*

$$Ker\, a^* = (Ran\, a)^\perp$$

Indien a bovendien gesloten is , is

$$Ker\, a = (Ran\, a^*)^\perp$$

Waarbij $Ran\, a$, het bereik van a gelijk is aan $\{a\xi \mid \xi \in \mathcal{H}\}$.

1.2.3 De drager van een operator

Neem a als een operator op de Hilbertruimte $\mathcal{H}$, dan beschouwen we de verzameling

$$A = \{\xi \in \mathcal{H} \,|\, T(\xi) = 0\}$$

Nemen we daar het orthogonale complement van $A^{\perp}$ dan zal dat een gesloten deelruimte van de Hilbertruimte $\mathcal{H}$ zijn. Noteren we dan met p de projectie op deze deelruimte $A^{\perp}$ van $\mathcal{H}$. Dan wordt deze projectie p de drager van de operator a genoemd. In het bijzonder gaat p de kleinste van de projecties q zijn zodanig dat $Tq = T$. We noteren dit als volgt:

$$supp(a) = p$$

1.2.4 Polaire decompositie

Elke gesloten dicht gedefinieerde operator a heeft een unieke (linkse-) polaire decompositie nl.

$$a = u|a|$$

waarbij $|a|$ een positief zelftoegevoegde operator is ($|a| = (a^*a)^{1/2}$) en u een partiële isometrie, met $supp(a)$ als projectie op de initiale ruimte van u en $r(a)$ als projectie op de sluiting van het bereik van a, de zogenaamde finale projectie van u. Meer info hierover is terug te vinden in ([2], I,1.3-1.4). Bovendien zal u ook een begrensde operator zijn met norm gelijk aan 1. Hierbij moet opgemerkt worden dat we u op een bijzondere manier zelfs tot een unitaire operator kunnen uitbreiden.

Aan de hand van de linkse polaire decompositie van a kunnen we nu ook de linkse polaire decompositie van a^* opschrijven. Omdat

$$a^* = |a|\, u^* = u^*(u|a|u^*)$$

zal $|a^*| = (u|a|u^*)$ en verkrijgen we voor a^* een polaire decompositie van de volgende vorm: $a^* = u^*|a^*|$.

1.2.5 De spectrale decompositie van een operator

Omdat er veel gebruik gemaakt gaat worden van de spectrale decompositie van een operator, zal het dus ook nuttig zijn om hier enkele belangrijke stellingen over te vermelden.

Definitie 1.19 *Zij a een operator op $\mathcal{H}$, dan noemen we a begrensd inverteerbaar als er een $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bestaat, zodat*

$$ba \subseteq ab = 1$$

De resolvente verzameling $\rho(a)$ van a is dan de verzameling:

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda 1 - a = \textit{begrensd inverteerbaar}\}$$

Het spectrum $\sigma(a)$ van a wordt gedefinieerd als: $\sigma(a) = \mathbb{C} \backslash \rho(a)$.

Voor een zelftoegevoegde operator a zal het spectrum een deel van $\mathbb{R}^+$ zijn.

Definitie 1.20 *Zij $(X, \mathcal{M})$ een meetbare ruimte en $\mathcal{H}$ een Hilbertruimte. Een spectrale maat op $(X, \mathcal{M}, \mathcal{H})$ is dan een afbeelding:*

$$E : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

zodat

- $\forall \Delta \in \mathcal{M} : E(\Delta) =$ *projectie.*
- $E(\emptyset) = 0$ *en* $E(X) = 1$.
- $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1) \,.\, E(\Delta_2) \quad \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{M}$
- $\forall$ *rij* $(\Delta_n)_n$ *van twee aan twee disjuncte verzamelingen in* $\mathcal{M}$*:*

$$E\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Delta_n)$$

Definitie 1.21 *Een operator a op een Hilbertruimte $\mathcal{H}$ wordt positief genoemd, als $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$*

In het bijzonder zal een positieve operator altijd zelftoegevoegd zijn.

Stelling 1.22 *Zij a een normale operator op $\mathcal{H}$ dan bestaat er een unieke spectrale maat E op de Borelverzamelingen van $\sigma(a)$ zo dat*

$$a = \int_{\sigma(a)} \lambda \, dE(\lambda)$$

Bovendien geldt dan ook nog dat $\lambda_0 \in \sigma(a)$ een eigenwaarde van a is als en slechts als $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$. In dit geval zal dan $E(\{\lambda_0\})$ de projectie op de eigenruimte van a horend bij de eigenwaarde λ_0 zijn.

Als laatste dienen we nog een kleine vermelding te maken over de spectrale resolutie van de eenheid, omdat we later in een bewijs hier gebruik van gaan maken. In feite komt het erop neer dat er een 1-1 verband is tusssen spectrale maten en spectrale resoluties van de eenheid. We verwijzen hiervoor naar de operatorentheorie ([5], III).

Het verband tussen beiden wordt gegeven door $E(]-\infty, t]) = P_t$, waarbij dan E een spectrale maat voorstelt en P_t een resolutie van de eenheid, vertrekkende van een spectrale maat kunnen we dan een spectrale resolutie van de enheid construeren en ook omgekeerd. We zullen hier nog kort vermelden, welke eisen er op een resolutie van de eenheid moeten liggen:

i. Voor elke t moet P_t een projectie definiëren.

ii. P_t moet stijgend zijn in t.

iii. P_t moet rechtscontinu zijn voor de sterke operator topologie.

iv. Voor de sterke limiet moeten we verkrijgen dat

$$\lim_{t\to-\infty} P_t = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} = 1$$

In het bijzonder verkrijgen we dan ook nog de volgende gelijkheid:

$$\int_{\mathbb{R}^+} t dP_t = \int_{\mathbb{R}^+} t dE(t)$$

1.2.6 De norm op een operator

Voor een operator a, die overal op $\mathcal{H}$ gedefinieerd is (zowel begrensd als onbegrensd) definiëren we een norm als volgt

$$\|a\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|a\xi\|$$

We verkrijgen hierbij ook de gewone eigenschappen:

$$\begin{aligned} \|a+b\| &\leq \|a\| + \|b\| \\ \|ab\| &\leq \|a\|\|b\| \end{aligned}$$

1.2.7 Het geaffilieerd zijn

Definitie 1.23 *Een lineaire operator a op $\mathcal{H}$ wordt geaffilieerd aan M genoemd $(a\,\eta\,M)$ als*

$$\forall y \in M' : ya \subseteq ay$$

Lemma 1.24 *i. als $a, b\,\eta\,M$ dan zal ook $a+b\,\eta\,M$ en $ab\,\eta\,M$*
ii. als a sluitbaar is en $a\,\eta\,M$ dan zal $[a]\,\eta\,M$
iii. als a dicht gedefinieerd is en $a\,\eta\,M$ dan zal ook $a^*\,\eta\,M$
iv. als a een gesloten dicht gedefinieerde operator is met polaire decompositie $a = u|a|$ dan geldt er:

$$a\,\eta\,M \Leftrightarrow u \in M \;\; en \;\; |a|\,\eta\,M$$

Bewijs:
Hierbij gaan we vooral gebruikmaken van de eigenschappen, van onbegrendsde operatoren, zoals vermeld in deze paragraaf.

i. We tonen dit eerst aan voor de som: Aangezien $a, b\,\eta\,M$, wil dat zeggen, dat $\forall y \in M'$:

$$\begin{aligned} ya &\subseteq ay \\ yb &\subseteq by \end{aligned}$$

Omdat nu y een begrensde operator is zal :

$$y(a+b) = ya + yb \subseteq ay + by = (a+b)y$$

omdat dit nu voor elke $y \in M'$ geldt zal $(a+b)\,\eta\,M$.

Het produkt is eenvoudiger:

$$yab \subseteq ayb \subseteq aby$$

en dit geldt voor elke $y \in M'$ bijgevolg zal dus $ab\,\eta\,M$.

ii. Zij $a \,\eta\, M$ en a sluitbaar dan moeten we aantonen dat de sluiting van a (gegeven door $[a]$) ook geaffilieerd aan M zal zijn. We moeten dus aantonen dat $\forall y \in M'$

$$y[a] \subseteq [a]y.$$

We hebben al dat voor elke $y \in M'$

$$ya \subseteq ay \subseteq [a]y$$

Omdat $[a]$ en y gesloten zijn, zal ook hun samenstelling gesloten zijn en verkrijgen we dat ya als deel van een gesloten operator $[a]y$ sluitbaar is. Bijgevolg zal

$$[ya] \subseteq [a]y.$$

In het bijzonder hebben we nu ook nog dat

$$y[a] \subseteq [a]y,$$

want:

$$[ya] = (ya)^{**} \supseteq (a^*y^*)^* \supseteq y^{**}a^{**} = y[a]$$

En zo verkrijgen we dus dat ook $[a] \,\eta\, M$.

iii. Omdat $a \,\eta\, M$ zal gelden dat

$$\forall y \in M' \,:\, ya \subseteq ay$$

en dus

$$\forall y \in M' \,:\, (ay)^* \subseteq (ya)^*$$

Omdat y nu een begrensde operator is zal dus

$$(ya)^* = a^*y^*$$

dat levert ons dus

$$y^*a^* \subseteq (ay)^* \subseteq (ya)^* = a^*y^*$$

Omdat M' nu zelftoegevoegd is zal bijgevolg:

$$\forall x \in M' : xa^* \subseteq a^*x$$

m.a.w. a^* zal geaffilieerd zijn aan M.

iv. We splitsen dit gedeelte op in twee stappen, we noteren telkens $a = u\,|a|$ als zijn polaire decompositie.

$\Leftarrow$ Dit is een rechtoe, rechtaan berekening: $\forall y \in M'$:

$$ya = yu|a| = uy|a| \subseteq u|a|y = ayu$$

en dus zal $a \,\eta\, M$.

$\Rightarrow$ We weten uit de polaire decompositie dat $u \in M$ en omdat we $|a|$ op de volgende wijze kunnen schrijven $|a| = (aa^*)^{1/2}$ volgt er omdat zowel a als a^* geaffilieerd zijn dat ook $|a|$ geaffilieerd aan M moet zijn. ■

We zullen met $\overline{M}$ de verzameling van de gesloten dicht gedefinieerde operatoren geaffileerd aan M voorstellen.

1.3 Eigenschappen van projectieoperatoren

Met M_{proj} noteren we nog steeds de projectie operatoren in de von Neumann-algebra M. (Wanneer er in deze sectie vermelding gemaakt wordt van een spoor τ, veronderstellen we dat deze von Neumann-algebra semi-eindig is en dat er dus een spoor τ op bestaat.)

1.3.1 Doorsnede en Unie van projectieoperatoren

Voor een gegeven familie $(p_i)_{i\in I}$ van projectieoperatoren op M, stelt $\wedge_{i\in I} p_i$ (resp. $\vee_{i\in I}\, p_i$) de projectie voor op $\cap_{i\in I} p_i\mathcal{H}$ (resp. $span\,(\cup_{i\in I}\, p_i\mathcal{H})$).

Noteer met $p^\perp = 1-p$ de projectie orthogonaal tot p. Dan hebben we ook de volgende relaties:

$$\begin{aligned}(\wedge_{i\in I}\, p_i)^\perp &= \vee_{i\in I}\, p_i^\perp \\ (\vee_{i\in I}\, p_i)^\perp &= \wedge_{i\in I}\, p_i^\perp\end{aligned}$$

1.3.2 equivalentie van projectieoperatoren

Definitie 1.25 *Twee projecties p en q worden* equivalent *genoemd als er een $u \in M$ bestaat zodanig dat:*

$$p = u^*u \;\; en \;\; q = uu^*$$

Deze equivalentie noteren we met $\sim$. Equivalente projecties hebben bovendien hetzelfde spoor.

Lemma 1.26 *Wanneer a een gesloten, dicht gedefinieerde operator geaffilieerd aan M is dan volgt er uit de polaire decompositie dat*

$$supp(a) \sim r(a)$$

Meer info hierover is terug te vinden in ([2]).

Voor twee willekeurige projecties $p, q \in M$ hebben we altijd (cfr [1]) dat:

$$(p \vee q) - p \sim q - (p \wedge q) \tag{1.1}$$

Er geldt ook dat:

$$\tau(p \vee q) \leq \tau(p) + \tau(q) \tag{1.2}$$

Dit resultaat (1.2) volgt uit de vergelijking (1.1), wanneer we gebruik maken van het feit dat equivalente projecties hetzelfde spoor hebben.

Meer algemeen kunnen we ook zeggen dat

$$\tau(\vee_{i\in I} p_i) \leq \sum_{i\in I} \tau(p_i) \tag{1.3}$$

voor een zekere familie $(p_i)_{i\in I}$ van projecties in M. Wanneer I eindig is volgt dit door inductie toe te passen op (1.2), voor het algemene geval moeten we gebruik maken van het feit dat τ normaal is.

Een ander gevolg van (1.1) is hetvolgende:

$$\forall p, q \in M_{proj} : p \wedge q = 0 \Rightarrow p \lesssim 1 - q. \tag{1.4}$$

(Waarbij $\lesssim$ betekent: ïs equivalent met een subprojectie van") Inderdaad want:

$$\begin{aligned} p = 1 - p^{\perp} &= (p \wedge q)^{\perp} - p^{\perp} \\ &= (p^{\perp} \vee q^{\perp}) - p^{\perp} \sim q^{\perp} - (p^{\perp} \wedge q^{\perp}) \\ &\leq q^{\perp} = 1 - q \end{aligned}$$

Voorbeeld: We werken hier met de von Neumann-algebra $L^{\infty}(X, \mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(X, \mu)$. Waarbij μ de maat op de verzameling X voorstelt die σ-eindig is en met $\mathcal{M}$ noteren we de σ-algebra. Het spoor op deze von Neumann-algebra (cfr. paragraaf 1.5.1) wordt gegeven door:

$$\tau(\,.\,) = \int_X .\, d\mu$$

Dan zijn de projectieoperatoren de karakteristieke functies:

$$\chi_A(\,.\,) = \begin{cases} 1 & voor \quad x \in A \\ 0 & voor \quad x \notin A \end{cases}$$

Met A als een meetbare verzameling. Want $\chi_A(\,.\,)$ voldoet duidelijk aan de gevraagde eisen namelijk:

$$\begin{aligned} (\chi_A)^* &= \overline{(\chi_A)} = \chi_A \\ (\chi_A)^2 &= \chi_A \end{aligned}$$

Wanneer we dan eigenschap (1.2) vertalen naar dit specifieke geval bekomen we de eindige subadditiviteit: (Neem A, B twee meetbare verzamelingen)

$$\begin{aligned} \int_X \chi_{A \cup B} d\mu &= \mu(A \cup B) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) \\ &= \int_X \chi_A d\mu + \int_X \chi_B d\mu \end{aligned}$$

De eigenschap (1.3) vertaalt zich in de σ-subadditiviteit: (Voor $(E_n)_{n \geq 1}$ als een aftelbare verzameling van meetbare delen.)

$$\begin{aligned} \int_X \chi_{\cup_{n \geq 1} E_n} &= \mu\left(\cup_{n \geq 1} E_n\right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_X \chi_{E_n} d\mu \end{aligned}$$

Voorbeeld: Voor de matrices (Voor de eenvoud bekijken we hier enkel het geval $n = 2$, de rest verloopt essentieel hetzelfde) drukken we eerst de hermitische toevoeging meer concreet uit:

$$\begin{aligned} \cdot^* : M_2(\mathbb{C}) &\rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto A^* = \overline{A}^t \end{aligned}$$

Omdat $tr(\,.\,)$ het traditionele spoor op de matrices voorstelt (cfr. [3], en zie voor de definitie 1.59) is het spoor van een projectieoperator gelijk aan de dimensie van de ruimte waarop deze operator projecteert, daaruit volgt het gevraagde.

1.4 De definitie van τ-meetbare operatoren en de basisstelling

Nu komen we tot het belangrijkste deel van dit eerste hoofdstuk. Eerst geven we de definitie van de τ-meetbare operatoren, en daarna hun belangrijkste eigenschappen, die we verder in dit hoofdstuk gaan aantonen. We gaan eerst deze wat abstracte definitie toegankelijker proberen te maken met twee belangrijke voorbeelden die door deze ganse verhandeling gaan terug komen. Deze twee voorbeelden komen in de volgende twee paragrafen aan bod.

Verder gaan we in dit hoofdstuk werken met een semi-eindige von Neumann-algebra M op een Hilbertruimte $\mathcal{H}$ en laat τ een normaal, trouw en semi-eindig spoor op M zijn.

Definitie 1.27 *Een gesloten, dicht gedefinieerde operator a geaffilieerd aan M wordt τ-meetbaar genoemd als $\forall \delta > 0$ er een projectie $p \in M$ bestaat zodat*

$$p\mathcal{H} \subseteq D(a) \text{ en } \tau(1-p) \leq \delta$$

Noteren we met $\tilde{M}$ de verzameling van alle τ-meetbare operatoren en met M_{proj} de verzameling van alle projecties in M. Dan verkrijgen we volgend belangrijk resultaat. (Dat we gaan aantonen in dit eerste hoofdstuk.)

Stelling 1.28 *i. $\tilde{M}$ is een *-algebra, voor de sterke som, sterk produkt en de toegevoegde operatie.*

ii. De verzamelingen

$$N(\epsilon, \delta) = \{a \in \tilde{M} \mid \exists p \in M_{proj} : p\mathcal{H} \subseteq D(a), \|ap\| \leq \epsilon, \tau(1-p) \leq \delta\}$$

Met $\epsilon, \delta > 0$ vormen een basis voor de omgevingen van nul, zodat we dus van $\tilde{M}$ een topologische vectorruimte kunnen maken.

iii. $\tilde{M}$ is een volledige Hausdorff *-algebra en M is een dicht deel van $\tilde{M}$.

1.5 De von Neumann-algebra L^∞ met spoor.

Wanneer (X, Ω, μ) een σ-eindige maatruimte is, dan kunnen we $L^\infty(X, \mu)$ als een von Neumann-algebra over $L^2(X, \mu)$ beschouwen.

Definitie 1.29 *Een maatruimte (X, Ω, μ) (Met Ω als de σ-algebra waarop μ werkt) wordt σ-eindig genoemd als X in een aftelbaar aantal meetbare delen kan opgesplitst worden, zodanig dat elk van die meetbare delen een eindige maat heeft.*

Stelling 1.30 *Zij (X, Ω, μ) een σ-eindige maatruimte en $g \in L^\infty(X, \mu)$. Definieer dan T_g op $L^2(X, \mu)$ door $T_g(f) = gf$ te stellen. Als $M = \{T_g \mid g \in L^\infty(\mu)\}$ dan definieert de afbeelding:*

$$\begin{aligned} L^\infty(X, \mu) &\to M \\ g &\mapsto T_g \end{aligned}$$

een isometrisch *-isomorfisme tussen $L^\infty(X, \mu)$ en M. Bovendien zal dan $M = M' = M''$ en vormt $L^\infty(X, \mu)$ na identificatie met M dus een von Neumann-algebra over $L^2(X, \mu)$.

Bewijs:
stap 1:
We tonen aan dat de afbeelding een isometrisch *-isomorfisme vormt.

De surjectiviteit volgt, wegens de definitie van M. Om de injectiviteit aan te tonen gaan we aantonen dat de afbeelding normbewarend (dus isometrisch) is. d.w.z. we tonen nu hetvolgende aan:

$$\|g\|_\infty = \|T_g\|$$

- Neem $f \in L^2(X, \mu)$ willekeurig.

$$\begin{aligned} \|T_g f\|_2^2 &= \|gf\|_2^2 \\ &= \int_X |g|^2 |f|^2 d\mu \\ &\leq \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

  dus

$$\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$$

- Omwille van de σ-eindigheid bestaat er een rij met eindige maat

$$\ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \Delta_{n+2} \supset \ldots$$

  zodat

$$|g(x)| > \|g\|_\infty - \frac{1}{n} \quad \forall x \in \Delta_n, n \in \mathbb{N}_0$$

dat levert ons de volgende ongelijkheden

$$\begin{aligned}\|T_g\|^2 &\geq \sup_n \|T_g \frac{\chi_{\Delta_n}}{\|\chi_{\Delta_n}\|}\|^2 \\ &= \sup_n \frac{\|T_g \chi_{\Delta_n}\|^2}{\|\chi_{\Delta_n}\|^2} \\ &= \sup_n \frac{\int_{\Delta_n} |g|^2 d\mu}{\int_{\Delta_n} d\mu} \\ &\geq \sup_n \left(\|g\|_\infty - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{\mu(\Delta_n)}{\mu(\Delta_n)} = \|g\|_\infty^2\end{aligned}$$

Samen met het vorige bolletje verkrijgen we dus nu

$$\|g\|_\infty = \|T_g\|$$

We hebben dus nu de bijectiviteit van de afbeelding aangetoond.

- Het aantonen dat deze afbeelding een *-isomorfisme vormt is zeer eenvoudig en komt neer op het aantonen van de volgende vier dingen, dit voor $f, g \in L^2(X, \mu)$ en $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}T_{f+g} &= T_f + T_g \\ T_{\lambda f} &= \lambda T_f \\ T f g &= T_f T_g \\ (T_f)^* &= T_{\overline{f}}\end{aligned}$$

Stap 2:
We merken eerst op dat T_g inderdaad in $\mathcal{B}(L^2(\mu))$ zit voor $g \in L^\infty(X, \mu)$. T_g is duidelijk lineair en voor elke $f \in L^2(\mu)$ geldt:

$$\begin{aligned}\|T_g(f)\|_2^2 &= \|gf\|_2^2 \\ &= \int_X |g|^2 |f|^2 d\mu \leq \|f\|_2^2 \|g\|_\infty^2\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat T_g begrensd is en $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.

Het is duidelijk dat als $M = M'$, dat dan ook $M = M''$. Omdat $M \subseteq M'$, volstaat het aan te tonen dat $M' \subseteq M$. Fixeer dus $A \in M'$. We moeten dan aantonen dat $A = T_g$ voor een $g \in L^\infty(X, \mu)$.

- Geval 1: $\mu(X) < +\infty$
  Dan is $1 \in L^2(X, \mu)$. Stel $g = A(1)$. Dus $g \in L^2(X, \mu)$. Als $h \in L^\infty(X, \mu)$, dan is $h \in L^2(X, \mu)$ en
  $$A(h) = AT_h(1) = T_h A(1) = T_h g = gh.$$

  Bovendien is $\|gh\|_2 = \|A(h)\|_2 \leq \|A\| \|h\|_2$.
  Zij $\Delta_n = \{x \in X \mid |g(x)| \geq n\}$. h Gelijk stellen aan χ_{Δ_n} in de vorige ongelijkheid geeft dan:

$$\begin{aligned}\|A\|^2 \mu(\Delta_n) &= \|A\|^2 \|h\|_2^2 \geq \|gh\|_2^2 \\ &= \int_{\Delta_n} |g|^2 d\mu \geq n^2 \mu(\Delta_n).\end{aligned}$$

Dus, als $\mu(\Delta_n) \neq 0$, is $\|A\| \geq n$. Omdat A begrensd is, volgt dus dat $\mu(\Delta_n) = 0$ voor een zekere n. Dus $g \in L^\infty(X,\mu)$. Nu is $A = T_g$ op $L^\infty(X,\mu)$ en $L^\infty(X,\mu)$ is dicht in $L^2(X,\mu)$, dus $A = T_g$ op $L^2(X,\mu)$.

- GEVAL 2: $\mu(X) = \infty$
  Als $\mu(\Delta) < +\infty$, zij

$$L^2(\mu \mid \Delta) = \{f \in L^2(X,\mu) | f(x) = 0 \ \forall x \in X \backslash \Delta\}.$$

  Voor $f \in L^2(\mu \mid \Delta)$ is $Af = A\chi_\Delta f = \chi_\Delta Af \in L^2(\mu \mid \Delta)$. Zij A_Δ de beperking van A tot $L^2(\mu \mid \Delta)$. Wegens geval 1 is er dan een g_Δ in $L^\infty(\mu|\Delta)$ zo dat $A_\Delta = T_{g_\Delta}$.
  Bovendien als $\mu(\Delta_1) < +\infty$ en $\mu(\Delta_2) < +\infty$, dan is

$$g_{\Delta_1}|\Delta_1 \cap \Delta_2 = g_{\Delta_2}|\Delta_1 \cap \Delta_2.$$

  Immers, $\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2} \in L^2(\mu \mid \Delta_1) \cap L^2(\mu \mid \Delta_2)$ zodat voor elke $x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$:

$$\begin{aligned} g_{\Delta_1}(x) &= g_{\Delta_1}\chi_{\Delta_1\cap\Delta_2}(x) = A_{\Delta_1}(\chi_{\Delta_1\cap\Delta_2})(x) \\ &= A_{\Delta_2}(\chi_{\Delta_1\cap\Delta_2})(x) = g_{\Delta_2}\chi_{\Delta_1\cap\Delta_2}(x) \\ &= g_{\Delta_2}(x) \end{aligned}$$

  Stel nu $X = \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$, waarbij $\Delta_n \in \Omega$ en $\mu(\Delta_n) < +\infty$. Stel nu $g(x) = g_{\Delta_n}(x)$ als $x \in \Delta_n$. Uit het voorgaande volgt dan dat g een goed gedefinieerde meetbare functie op X is. Nu is

$$\|g_\Delta\|_\infty = \|T_{g_\Delta}\| = \|A_\Delta\| \leq \|A\|.$$

  Daarom is $\|g\|_\infty \leq \|A\|$.
  Stel nu $E_1 = \Delta_1$ en $E_n = \Delta_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1}\{E_k\}$. Dan is $\{E_n\}_n$ een aftelbare, disjuncte Ω-partitie van X zo dat $E_n \subseteq \Delta_n$ voor elke n in $\mathbb{N}_0$. Als dan $f \in L^2(X,\mu)$, dan is $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f\chi_{E_n}$ (puntsgewijs). Nu is voor elke N in $\mathbb{N}$

$$|f - \sum_{n=1}^N f\chi_{E_n}| \leq |f| + \sum_{n=1}^N |f\chi_{E_n}| \leq 2|f|$$

  zodat uit de gedomineerde convergentiestelling volgt dat

$$\|f - \sum_{n=1}^N f\chi_{E_n}\|_2 \longrightarrow 0 \ als \ N \longrightarrow \infty.$$

  Daarom verkrijgen we gebruikmakend van het feit dat

$$\begin{aligned} A\sum_{n=1}^N f\chi_{E_n} &= \sum_{n=1}^N Af\chi_{E_n} \\ &= \sum_{n=1}^N A_{\Delta_n} f\chi_{E_n} \\ &= \sum_{n=1}^N g_{\Delta_n} f\chi_{E_n} \\ &= g\sum_{n=1}^N f\chi_{E_n} \end{aligned}$$

dat:

$$\begin{aligned} \|Af - gf\|_2 &\leq \left\| Af - A\left(\sum_{n=1}^{N} f\chi_{E_n}\right)\right\|_2 + \left\| A\left(\sum_{n=1}^{N} f\chi_{E_n}\right) - gf\right\|_2 \\ &= \|A\| \,.\, \left\| f - \sum_{n=1}^{N} f\chi_{E_n}\right\|_2 + \|g\|_\infty \,.\, \left\|\sum_{n=1}^{N} f\chi_{E_n} - f\right\|_2 \end{aligned}$$

Omdat nu voor $N \to \infty$ het rechterlid naar 0 volgt uit de eigenschappen van de norm $\|\,.\,\|_2$ dat

$$Af = T_g f.$$

■

Om aan te tonen waarom het σ-eindig zijn van belang is nemen we het volgende voorbeeld, wanneer een ruimte niet σ-eindig is kan het voorvallen dat de ruimte $L^2(X,\mu)$ veel te klein gaat zijn: Stel $X = \{a, b\}$ en beschouw als verzameling van meetbare delen alles d.w.z. $\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ hierop definiëren we dan de volgende niet σ-eindige maat μ als volgt:
$\mu(\emptyset) = 0$
$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = +\infty$.
Beschouwen we dan de functies van X naar $\mathbb{C}$.

$$f : \{a, b\} \to \mathbb{C}$$

Dan kunnen we deze verzameling van functies identificeren met $\mathbb{C}^2$. Bijgevolg gaat elke functie op deze ruimte begrensd zijn want:

$$\|f\|_\infty = max(f(a), f(b)) < +\infty$$

want $f(a)$ en $f(b)$ zitten in $\mathbb{C}$.

om $L^2(X,\mu)$ nu echter te kennen moeten we eerst de integraal specifiëren, integreren in deze ruimte komt op hetvolgende neer:

$$\int_X f d\mu = f(a)\,.\mu(a) + f(b)\,.\mu(b) = f(a)\,.(+\infty) + f(b)\,.(+\infty)$$

Het is dus duidelijk dat een functie op X enkel kwadratisch integreerbaar zal zijn als ze gelijk is aan de constante functie 0. Bijgevolg gaat de verzameling van de begrensde operatoren op $L^2(X,\mu)$ dan overeenstemmen met 0.

$$\mathcal{B}(L^2(X,\mu)) = 0$$

We zien dus dat $\mathcal{B}(L^2(X,\mu)$ veel te klein is om $L^\infty(X,\mu)$ te kunnen inbedden.

Merk op: In feite is de restrictie dat de ruimte σ-eindig moet zijn te zwaar om van $L^\infty(X,\mu)$ een von Neumann-algebra te maken. Met minder zware eisen kunnen we er ook komen. Uit het bovenstaande tegenvoorbeeld is echter duidelijk dat de σ-endigheid sterk genoeg is en we gaan dan ook met dit bijzondere geval verder werken doorheen de rest van de verhandeling.

1.5.1 het gewicht op $L^\infty(X,\mu)$

Op deze von Neumann-algebra gaan we nu een gewicht ϕ leggen, definieer ϕ als volgt:

$$\phi : L^\infty(X,\mu)^+ \to [0,+\infty] : f \mapsto \phi(f) = \int_X f d\mu$$

Dan gaat blijken dat dit gewicht een semi-eindig, trouw en normaal spoor op de von Neumann-algebra $L^\infty(X,\mu)$ gaat vormen.

- Definieert ϕ wel een gewicht?
  Uit de eigenschappen van de integraal volgt het gevraagde:

$$\begin{cases} \phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g), & \forall f,g \in L^\infty(X,\mu)^+ \\ \phi(\lambda f) = \lambda\phi(f), & \forall f \in L^\infty(X,\mu)^+, \forall \lambda \geq 0 \end{cases}$$

- Definieert ϕ een spoor?
  In feite is het onnodig om deze voorwaarde na te gaan want $L^\infty(X,\mu)$ is een commutatieve von Neumann-algebra . Dus gaat er onmiddellijk wegens de commutativiteit hetvolgende gelden $\forall f \in L^\infty(X,\mu)^+$ en voor elke unitaire operator T_g in $L^\infty(\mu)$:

$$\phi(T_g f T_g^{-1}) = \phi(gfg^{-1}) = \phi(gg^{-1}f) = \phi(f)$$

- Is ϕ trouw?
  Stel $f \in L^\infty(X,\mu)$ zodat $\phi(f^*f) = 0$ Dat wil dus in feite zeggen dat

$$\begin{aligned} \phi(f^*f) &= \phi(\bar{f}f) = \phi(|f|^2) \\ &= \int_X |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2 = 0 \end{aligned}$$

  Uit de maattheorie volgt dan, omdat $\|.\|_2$ een norm definieert dat $f = 0$ moet zijn.

- Is ϕ normaal?
  Opnieuw grijpen we hier (voor een speciaal geval namelijk rijen i.p.v. netten) naar een stelling uit de maattheorie, namelijk de monotone convergentiestelling (voor het bewijs cfr. [6]) die zegt:
  Zij (X,Ω,μ) een maatruimte en $(f_n)_n$ een stijgende rij van positieve meetbare functies $f_n : X \to [0,+\infty]$, dan is ook $\sup_n f_n$ een positieve meetbare functie en

$$\phi(\sup_n f_n) = \int_X \sup_n f_n d\mu = \sup_n \int_X f_n d\mu = \sup_n \phi(f_n)$$

  We kunnen deze monotone convergentiestelling echter niet zomaar verder veralgemenen naar willekeurige netten toe. We geven hier hetvolgende tegenvoorbeeld toegepast op de von Neumann-algebra $L^\infty([0,1],\mu)$ over de Hilbertruimte $L^2([0,1],\mu)$ met μ als gewone Lebesguemaat. Met elke functie uit $L^\infty([0,1],\mu)$ associëren we een vermenigvuldigingsoperator op $L^2([0,1],\mu)$. Beschouwen we $[0,1]$ als indexverzameling, geordend door inclusie. Stel dan voor elke α, α als een eindige deelverzameling van $[0,1]$, en definiëren we dan $g_\alpha = \chi_\alpha$. Kies dan

α zodanig dat we een stijgend net $(g_\alpha)_\alpha$ van operatoren hebben in $L^\infty([0,1],\mu)$, dan zal $g_\alpha \nearrow 1$ maar toch zal dat niet gelden voor het spoor, want

$$\int_{[0,1]} g_\alpha \, d\mu = 0 \;\; en \;\; \int_{[0,1]} 1 \, d\mu = 1$$

Dat deze vergelijking hier mank loopt, komt omdat we een foute interpretatie gemaakt hebben, omdat de functies g_α naar 1 streven, wil dat namelijk nog niet zeggen dat ook de hiermee geassocieerde vermenigvuldigingsoperatoren naar 1 gaan streven, wanneer we alles rechtvaardig interpreteren gaan we de normaliteit van het spoor ϕ wel kunnen aantonen. Het bewijs hiervan splitsen we traditioneel op in twee delen, eerst voor een eindige maatruimte, en daarna behandelen we het σ-eindige geval.

– $\mu(\mathbf{X}) < +\infty$
Stel $(g_\alpha)_\alpha$ als een net in $L^\infty(X,\mu)$ zodat de vermenigvuldigingsoperatoren hiermee geassocieerd stijgen naar de vermenigvuldigingsoperator, geassocieerd aan de functie $g \in L^\infty(X,\mu)$. Dat wil dus in feite zeggen voor de volgende operatoren op $L^2(X,\mu)$:

$$T_{g_\alpha} \nearrow T_g$$

dit laatste komt neer op

$$\forall f \in L^2(X,\mu) : < T_{g_\alpha} f \, , \, f > \nearrow < T_g f \, , \, f >$$

Omdat X nu een eindige maatruimte is zal $1 \in L^2(X,\mu)$ en dus zal ook

$$< T_{g_\alpha} 1, 1 > \nearrow < T_g 1, 1 >$$

letterlijk vertaald naar het inprodukt dat op $L^2(X,\mu)$ ligt verkrijgen we dan:

$$\int_X g_\alpha \, d\mu \nearrow \int_X g \, d\mu$$

Dat levert ons dan voor een eindige maatruimte het gevraagde namelijk:

$$\sup_\alpha \phi(g_\alpha) = \phi(g)$$

– X **is σ-eindig**
Hierbij gaan we gebruikmaken van het vorige geval, stel hier namelijk Δ_n als een stijgende rij meetbare verzamelingen, zodanig dat $\cup_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n = X$ en zodat $\forall n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\mu(\Delta_n) < +\infty$. Dit laatste mag omdat we X σ-eindig ondersteld hebben. Stel opnieuw $(g_\alpha)_\alpha$ als een stijgend net, zodat de vermenigvuldigingsoperatoren hiermee geassocieerd stijgen naar de vermenigvuldigingsoperator geassocieerd aan de functie $g \in L^\infty(X,\mu)$, dan verkrijgen we gebruikmakend van de monotone convergentiestelling hetvolgende resultaat:

$$\int_X g \, d\mu \;\; = \;\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X g\chi_{\Delta_n} \, d\mu$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Delta_n} g\, d\mu \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\alpha} \int_{\Delta_n} g_\alpha\, d\mu \\ &= \sup_{\alpha} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Delta_n} g_\alpha\, d\mu \\ &= \sup_{\alpha} \int_X g_\alpha\, d\mu \end{aligned}$$

Dat wil dus zeggen dat $\sup_\alpha \phi(g_\alpha) = \phi(g)$ en dus zal het spoor τ normaal zijn.

- ϕ semi-eindig?
  We gaan aantonen dat de verzameling n_ϕ σ-sterk dicht ligt in $L^\infty(X,\mu)$

$$\begin{aligned} n_\phi &= \left\{ f \in L^\infty(X,\mu) \;\middle|\; \int_X |f|^2 \; +\infty \right\} \\ &= L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu) \end{aligned}$$

  Voor $\mu(\mathbf{X}) < +\infty$ is $L^\infty(X,\mu) \subset L^2(X,\mu)$ en dus is zeker $L^\infty(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$ σ-sterk dicht in $L^\infty(X,\mu)$.

  Voor $\mu(\mathbf{X}) = +\infty$ Neem $f \in L^\infty(X,\mu)$ willekeurig. Omdat de ruimte σ-eindig is bestaat er dus een aftelbare partitie Δ_n met eindige maat en stijgend naar X. Stel dan $f_n = f\chi_{\Delta_n}$, dan is f_n zeker een element uit $L^\infty(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$, we tonen nu aan dat f_n naar f convergeert in de σ-sterke topologie. We moeten dus aantonen dat voor een willekeurige rij $(\xi_k)_k$ in $L^2(X,\mu)$ met $\sum_{k\in N} \|\xi_k\|^2 < +\infty$

$$\sum_k \|(f - f_n)\xi_k\|^2 \to 0, \quad \textit{voor } n \to \infty$$

  Wegens de monotone convergentiestelling kunnen we de bovenstaande som ook als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} \sum_k \|(f - f_n)\xi_k\|^2 &= \sum_k \int_X |f - f_n|^2 |\xi_k|^2 d\mu \\ &= \int_X |f - f_n|^2 \left(\sum_k |\xi_k|^2 \right) d\mu \end{aligned}$$

  Het zal dus volstaan om aan te tonen dat de laatste integraal naar 0 zal streven, dat doen we met behulp van de gedomineerde convergentiestelling, omdat we volgende puntsgewijze convergentie hebben voor $n \to \infty$:

$$|f - f_n|^2 \left(\sum_k |\xi_k|^2 \right) \to 0$$

  en omdat

$$|f - f_n| \leq 2|f| \leq 2\,\|f\|_\infty$$

verkrijgen we dat :

$$\begin{aligned}\int_X |f-f_n|^2 \left(\sum_k |\xi_k|^2\right) &\leq 4\|f\|_\infty^2 \left(\int_X \sum_k |\xi_k|^2\right) \\ &= 4\,\|f\|_\infty^2 \left(\sum_k \|\xi_k\|^2\right) < +\infty\end{aligned}$$

We mogen dus op

$$\int_X |f-f_n|^2 \left(\sum_k |\xi_k|^2\right) d\mu$$

de gedomineerde convergentiestelling toepassen, en dat levert ons de gevraagde convergentie naar 0. Het spoor ϕ zal dus wel degelijk semi-eindig zijn.

Opmerking: In feite kunnen we de semi-eindigheid eenvoudiger aantonen, gebruikmakend van eigenschappen over de verschillende topologieën. Voor meer info over deze topologieën kunnen we dan ook verwijzen naar het werk van J. Dixmier ([3]).

1.6 $M_n(\mathbb{C})$ met het gewone spoor

In deze paragraaf gaan we aantonen dat $M_n(\mathbb{C})$ een von Neumann-algebra voorstelt en dat het gekende spoor $tr(.)$ aan de gevraagde eisen voldoet.

$$tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

1.6.1 $M_n(\mathbb{C})$ vormt een von Neumann-algebra

Dat $M_n(\mathbb{C})$ een von Neumann-algebra voorstelt volgt uit hetvolgende: Aangezien er geldt dat $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ en $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)'$ is de verzameling van de scalaire operatoren op $\mathbb{C}^n$. Wanneer we dan de commutant van deze scalaire operatoren beschouwen bekomen we $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ terug. Er geldt dus dat $M_n(\mathbb{C})'' = M_n(\mathbb{C})$ en dus stelt $M_n(\mathbb{C})$ een von Neumann-algebra voor over de Hilbertruimte $\mathbb{C}^n$.

1.6.2 De eigenschappen van $tr(.)$ op $M_n(\mathbb{C})$

Nu moeten we nog nagaan dat de volgende afbeelding wel degelijk een semi-eindig, normaal en trouw spoor definieert:

$$\begin{aligned} tr(.) : M_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} : \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} &\mapsto a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \end{aligned}$$

Vooraleer we allerlei eigenschappen over $tr(\,.\,)$ gaan aantonen, komt er eerst een klein lemma over een bijzondere eigenschap van $tr(\,.\,)$. (cfr. [19])

Lemma 1.31 $\forall a, b \in M_n(\mathbb{C})$

$$tr(ab) = tr(ba)$$

Bewijs:
het bewijs is een rechttoe, rechtaan berekening:

$$\begin{aligned} tr(ab) &= \sum_{i=1}^{n}(ab)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(ba)_{kk} = tr(ba) \end{aligned}$$

■

- $tr(.)$ definieert een gewicht:
  Het is eenvoudig na te gaan dat $tr(.)$ aan de volgende twee eigenschappen voldoet:

$$\begin{cases} tr(a+b) = tr(a) + tr(b), & \forall a, b \in M_n(\mathbb{C})^+ \\ tr(\lambda a) = \lambda tr(a), & \forall a \in M_n(\mathbb{C})^+, \forall \lambda \geq 0 \end{cases}$$

- $tr(.)$ definieert een spoor.
  Deze eigenschap volgt praktisch onmiddellijk uit lemma 1.31. Stel u als unitaire matrix van $M_n(\mathbb{C})$ dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned} tr(uau^{-1}) &= tr(u(au^{-1})) \\ &= tr((au^{-1})u) \\ &= tr(a) \end{aligned}$$

  en dit $\forall a \in M_n(\mathbb{C})$.

- $tr(.)$ is een normaal gewicht.
  Stel $(a_i)_i$ als een stijgende rij matrices in $M_n(\mathbb{C})$, met supremum gelijk aan de matrix a. (Normaal zou dit voor een net moeten maar dat gaat essentieel op hetzelfde neerkomen.) Beschouw $(e_k)_{k=1..n}$ als standaardbasis van $\mathbb{C}^n$, dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned} tr(a) &= \sum_{k=1}^{n} < ae_k, e_k > \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sup_i < a_i e_k, e_k > \\ &= \sup_i \left(\sum_{k=1}^{n} < a_i e_k, e_k > \right) \\ &= \sup_i tr(a_i) \end{aligned}$$

- $tr(.)$ definieert een trouw gewicht.
  Om dit aan te tonen gaan we vooral eigenschappen uit de algebra moeten gebruiken. Stel $tr(a^*a) = 0$, aangezien a^*a een zelftoegevoegde, positieve matrix is kunnen we a^*a omzetten, m.b.v. een unitaire matrix u in een diagonaalmatrix $u^{-1}a^*au$ met positieve diagonaal elementen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dat levert ons dan :

  $$\begin{aligned} tr(a^*a) &= tr(u^{-1}a^*au) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

  Omdat nu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$, moeten alle diagonaal elementen gelijk aan nul worden, bijgevolg zal ook a^*a nul zijn.

- $tr(.)$ is semi-eindig.
  We moeten nu aantonen dat $n_{tr(\,.\,)}$ σ-sterk dicht is in $M_n(\mathbb{C})$. Aangezien

  $$tr(a) < +\infty \quad \forall a \in M_n(\mathbb{C})$$

  gaat zeker ook gelden dat

  $$tr(a^*a) < +\infty \quad \forall a \in M_n(\mathbb{C}).$$

  Dus zal

  $$n_{tr} = \{a \in M_n(\mathbb{C}) | tr(a^*a) < +\infty\} = M_n(\mathbb{C})$$

  en bijgevolg is $tr(.)$ dus semi-eindig.

Op de matrices kunnen we ook een gewicht definiëren dat geen spoor is, beschouwen we namelijk de afbeelding $tr(\rho\,.\,)$ met ρ als positieve matrix, $tr(\rho) = 1$ en geen veelvoud van de eenheidsmatrix. Dan kunnen we praktisch alle eigenschappen analoog aantonen, behalve het feit dat deze afbeelding een spoor definieert.

1.7 De theorie van de τ-meetbare operatoren

1.7.1 Inleiding

Vooraleer we gaan starten met het aantonen van Stelling 1.28, herhaal ik nogmaals kort de definitie van een τ-meetbare operator, en geef ik een aantal equivalente karakterizaties, om wat meer voeling met het begrip te verkrijgen:

Een gesloten, dicht gedefinieerde operator a geaffilieerd aan M wordt τ meetbaar genoemd als $\forall \delta > 0$ er een projectie $p \in M$ bestaat zodat

$$p\mathcal{H} \subseteq D(a) \text{ en } \tau(1-p) \leq \delta$$

We vertrekken van deze definitie en construeren zo een aantal verzamelingen van operatoren $D(\epsilon, \delta)$, die later ook nuttig gaan blijken om de topologie op $\tilde{M}$ te definiëren. Uiteindelijk bekomen we dan op het einde van sectie 1.7.4. Het belangrijke resultaat van de equivalente karakterizaties. Ik vermeld het resultaat hier reeds:

Stel $a \in \bar{M}$ met polaire decompositie $a = u|a|$ en spectrale resolutie:

$$|a| \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda).$$

Dan zijn de volgende karakterizaties equivalent:

i. a *is* τ*-meetbaar.*

ii. $|a|$ *is* τ*-meetbaar*

iii. $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : a \in D(\epsilon, \delta)$

iv. $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta$

v. $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \to 0$ *als* $\lambda \to \infty$

vi. $\exists \lambda > 0$ *zodat* $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) < \infty$

Dit wil natuurlijk niet zeggen dat de hier bewandelde weg de enig zaligmakende is, het is evengoed mogelijk om als definitie één van de equivalente karakterizaties te nemen, de weg omgekeerd te bewandelen, en zo tot de verzameling $D(\epsilon, \delta)$ te komen.

1.7.2 De $D(\epsilon, \delta)$ verzameling van operatoren.

Definitie 1.32 *Zij $\epsilon, \delta > 0$ Dan noteren we met $D(\epsilon, \delta)$ de verzameling van alle operatoren a geaffilieerd aan M waarvoor er een projectie $p \in M$ bestaat, zodanig dat:*
i. $p\mathcal{H} \subseteq D(a)$ *en* $\|ap\| \leq \epsilon$
en
ii. $\tau(1-p) \leq \delta$

Aangezien $p\mathcal{H} \subseteq D(a)$ zal de operator ap overal gedefinieerd zijn. De eis $\|ap\| \leq \epsilon$ impliceert bovendien dat de operator ap begrensd is. Merk op dat in deze definitie niet geëist wordt dat a dicht gedefinieerd gesloten of sluitbaar is.

Propositie 1.33 *Zij $\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ Dan zal:*
i. $D(\epsilon_1, \delta_1) + D(\epsilon_2, \delta_2) \subseteq D(\epsilon_1 + \epsilon_2, \delta_1 + \delta_1)$
ii. $D(\epsilon_1, \delta_1)D(\epsilon_2, \delta_2) \subseteq D(\epsilon_1\epsilon_2, \delta_1 + \delta_1)$

Bewijs:

(i) laat $a \in D(\epsilon_1, \delta_1)$ en $b \in D(\epsilon_2, \delta_2)$, dan bestaan er projecties $p, q \in M$ zodat

$$p\mathcal{H} \subseteq D(a), \|ap\| \leq \epsilon_1 \ \ en \ \ \tau(1-p) \leq \delta_1$$

$$q\mathcal{H} \subseteq D(b), \|bq\| \leq \epsilon_2 \ \ en \ \ \tau(1-q) \leq \delta_2$$

Neem $r = p \wedge q$, dan zal

$$r\mathcal{H} = p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H} \subseteq D(a) \cap D(b) = D(a+b)$$

en ook

$$\|(a+b)r\| = \|ar+br\| \leq \|ar\| + \|br\| \leq \|ap\| + \|bq\| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Verder zal ook (cfr (1.2))

$$\tau(1-r) = \tau((p \wedge q)^\perp) = \tau(p^\perp \vee q^\perp) \leq \tau(1-p) + \tau(1-q) \leq \delta_1 + \delta_2.$$

Dit bewijst het eerste deel van de stelling.

(ii) Om het tweede deel aan te tonen nemen we opnieuw $a \in D(\epsilon_1, \delta_1)$ en $b \in D(\epsilon_2, \delta_2)$ met $p, q \in M_{proj}$ zoals hierboven. Dan is bq, en bijgevolg ook $(1-p)bq$ begrensd. Noteer met s de projectie op de nulruimte

$$N((1-p)bq) = \{\xi \in \mathcal{H} \,|(1-p)bq\xi = 0\}$$

van $(1-p)bq$ d.w.z. $s\mathcal{H} = N((1-p)bq)$. Voor elke $\xi \in s\mathcal{H}$ hebben we $(q\xi \subseteq D(ab))$ en dus $bq\xi \in p\mathcal{H} \subseteq D(a)$ zodat dus $s\mathcal{H} \subseteq D(abq)$ en dus ook

$$(q \wedge s)\mathcal{H} \subseteq D(ab).$$

Omdat $abqs = apbqs$ (want $bqs\xi \in p\mathcal{H}$, $\forall \xi$) geldt er dat

$$ab(q \wedge s) = abqs(q \wedge s) = apbq(q \wedge s)$$

en dus

$$\|ab(q \wedge s)\| \leq \|ap\|\|bq\| \leq \epsilon_1\epsilon_2.$$

Gebruik makend van

$$1 - s = supp((1-p)bq) \sim r((1-p)bq) \leq 1 - p$$

Krijgen we dat

$$\begin{aligned} \tau(1-(q \wedge s)) = \quad & \tau((1-q) \vee (1-s)) \\ & \leq \tau(1-q) + \tau(1-s) \\ & \leq \tau(1-q) + \tau(1-p) \quad \leq \delta_1 + \delta_2. \end{aligned}$$

Wat we moesten aantonen. ■

Propositie 1.34 *Zij* $\epsilon, \delta > 0$.

i. Als a een sluitbare operator is dan:

$$a \in D(\epsilon, \delta) \Rightarrow [a] \in D(\epsilon, \delta).$$

ii. Als a een gesloten, dicht gedefinieerde operator is met polaire decompositie $a = u|a|$ *dan:*

$$a \in D(\epsilon, \delta) \Leftrightarrow u \in M \text{ en } |a| \in D(\epsilon, \delta)$$

Bewijs:

i. Als $a \,\eta\, M \Rightarrow [a] \,\eta\, M$ (cfr. lemma 1.24).
Aangezien $p\mathcal{H} \subseteq D(a) \subseteq D([a])$ en $[a]|_{D(a)} = a$ volgt er onmiddellijk dat $\|ap\| = \|[a]p\| \leq \epsilon$ en $\tau(1-p) \leq \delta$.

ii. $a \,\eta\, M \Leftrightarrow u \in M$ *en* $|a| \,\eta\, M$.
Nemen we opnieuw dezelfde projectieoperator p, dan verkrijgen we $\tau(1-p) \leq \delta$ en $\||a|p\| = \|u^*ap\| \leq \|u^*\|.\|ap\| \leq \epsilon$. De andere richting verloopt analoog. ■

Hetvolgende lemma is zeer belangrijk omdat we hier het verband krijgen tussen de $D(\epsilon, \delta)$ omgevingen en het spoor van de spectrale projecties geassocieerd aan de operator $|a|$.

Lemma 1.35 *Als* $a \in \bar{M}$ *en* $\epsilon, \delta > 0$ *met als spectrale projectie van* $|a|$

$$|a| = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$$

dan zal

$$a \in D(\epsilon, \delta) \Leftrightarrow \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta$$

Bewijs:
Merk op dat we met $\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)$ de spectrale projectie van $|a|$ bedoelen, corresponderend met het interval $]\epsilon, \infty[$. In termen van de spectrale maat $E(\lambda)$ wordt dit dan: $E(\lambda) = \chi_{[0,\lambda]}(|a|)$ dus $\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|) = 1 - E(\epsilon)$.

$\Leftarrow$: Stel gewoon $p = \chi_{[0,\epsilon]}(|a|)$. Dan zal

- $p\mathcal{H} \subseteq D(|a|)$
- $\||a|p\| \leq \epsilon$ en
- $\tau(1-p) \leq \delta$

$\Rightarrow$: Voor een zekere $p \in M_{proj}$ hebben we dat

$$\||a|p\| \leq \epsilon \;\; en \;\; \tau(1-p) \leq \delta.$$

Nu hebben we voor alle $\xi \in p\mathcal{H}$: $\||a|\xi\|^2 \leq \epsilon^2\|\xi\|^2$. En voor alle $\xi \in (1 - E(\epsilon))\mathcal{H} \setminus \{0\}$ volgt uit:

$$\begin{aligned} \| \, |a|\xi\|^2 &= \int_0^\infty \lambda^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) \\ &= \int_{]\epsilon,\infty[} \lambda^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) \\ &> \epsilon^2 \int_{]\epsilon,\infty[} dE_{\xi,\xi}(\lambda) \\ &> \epsilon^2\|\xi\|^2 \end{aligned}$$

dat $\| \, |a|\xi\|^2 > \epsilon^2\|\xi\|^2$.
Bijgevolg moet dus $(1 - E(\epsilon))\mathcal{H} \cap p\mathcal{H} = 0$, d.w.z dat $(1 - E(\epsilon)) \wedge p = 0$ uit (1.4) volgt dan dat $(1 - E(\epsilon)) \lesssim 1 - p$, bijgevolg zal dus ook $\tau(1 - E(\epsilon)) = \tau(\chi_{]\epsilon,+\infty[}) \leq \delta$.

En dat levert het gevraagde. ■

Propositie 1.36 *Als $a \in \bar{M}$ en $\epsilon, \delta > 0$ Dan zal:*

$$a \in D(\epsilon, \delta) \Leftrightarrow a^* \in D(\epsilon, \delta).$$

Bewijs:
Beschouw $a = u|a|$ als de polaire decompositie van a. Dan zal u een isometrie zijn van $\chi_{]0,\infty[}(|a|) = supp(a)$ op $\chi_{]0,\infty[}(|a^*|) = supp(a^*) = r(a)$. Door de uniciteit van de spectrale decompositie zal u voor elke $\lambda > 0$ een isometrie tussen $\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)$ en $\chi_{]\lambda,\infty[}(|a^*|)$ induceren. Dan volgt het resultaat uit het vorig lemma. ■

1.7.3 τ-dichte deelruimten

Definitie 1.37 *Een deelruimte E van $\mathcal{H}$ wordt τ-dicht genoemd als er voor elke $\delta > 0$ een projectie $p \in M$ bestaat zodat:*

$$p\mathcal{H} \subseteq E \ \ en \ \ \tau(1-p) \leq \delta.$$

Propositie 1.38 *Zij E een τ-dichte deelruimte van $\mathcal{H}$. Dan bestaat er een stijgende keten van projecties $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M met*

$$p_n \nearrow 1 \ , \ \tau(1-p_n) \to 0 \ en \ \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n\mathcal{H} \subseteq E.$$

Bewijs:
Uit de definitie van de τ-dichtheid van E volgt het bestaan van een rij projecties $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M zodat:

$$q_k\mathcal{H} \subseteq E \ \ en \ \ \tau(1-q_k) \leq 2^{-k}$$

Definieer dan

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \wedge_{k=n+1}^{\infty} q_k$$

dan is $p_n \subseteq p_{n+1}$ en geldt nog steeds:

$$p_n\mathcal{H} = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} q_k\mathcal{H} \subseteq E$$

en

$$\tau(1-p_n) = \tau(\vee_{k=n+1}^{\infty}(1-q_k)) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \tau(1-q_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}$$

Noteren we dan met p het supremum van deze keten dan zal:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \tau(1-p) \leq \tau(1-p_n) \leq 2^{-n}$$

Bijgevolg zal dus wegens de trouwheid van τ gelden dat

$$\tau(1-p) = 0 \ \ en \ dus \ \ p = 1$$

Bovendien zal dan ook:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n\mathcal{H} \subseteq E.$$

■

Gevolg 1.39 *Aangezien $p_n \nearrow 1$ zal dus $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} p_n\mathcal{H}} = \mathcal{H} \subseteq \bar{E}$ dus moet $\bar{E} = \mathcal{H}$ of m.a.w. als E een τ-dichte deelruimte van $\mathcal{H}$ is dan zal E ook norm dicht zijn in $\mathcal{H}$.*

De volgende propositie is een heel belangrijke eigenschap, ze is een soort uitbreiding van de gekende eigenschap voor begrensde operatoren, zoals die in de volgende stelling vermeld wordt:

Stelling 1.40 *Zij $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en zij K een dicht deel van $\mathcal{H}$, voor de norm $\|\,.\,\| = \sqrt{<,>}$ zodat*

$$a|_K = b|_K$$

Dan zal $a = b$ op gans $\mathcal{H}$.

Bewijs:
Het bewijs is terug te vinden in ([4]), en maakt gebruik van het feit, dat een dicht gedefinieerde, begrensde operator, een unieke uitbreiding tot op gans $\mathcal{H}$ bezit. ■

Vooraleer we deze veralgemeende stelling voor de onbegrensde operatoren kunnen aantonen, moeten we eerst nog een technisch lemma bewijzen.

Lemma 1.41 *i. $p_0 \in M_{proj}$ en stel dat*

$$\forall \delta > 0, \exists p \in M_{proj} : p_0 \wedge p = 0 \ \ en \ \ \tau(1-p) \leq \delta.$$

dan zal $p_0 = 0$
ii. Als $p_1, p_2 \in M_{proj}$ en stel dat

$$\forall \delta > 0\,, \exists p \in M_{proj} : p_1 \wedge p = p_2 \wedge p \ \ en \ \ \tau(1-p) \leq \delta.$$

Dan zal $p_1 = p_2$.

Bewijs:

i. Zij $\delta > 0$ Dan volgt uit het feit dat er een $p \in M_{proj}$ bestaat waarvoor $\tau(1-p) \leq \delta$ en $p_0 \wedge p = 0$ dat $p_0 \lesssim 1 - p$ en dus zal $\tau(p_0) \leq \tau(1-p) \leq \delta$. Aangezien dat voor een willekeurig gekozen δ geldt zal dus $\tau(p_0) = 0$ moeten zijn en uit de trouwheid van τ volgt dan dat $p_0 = 0$ is.

ii. Stel $p_0 = p_1 - (p_1 \wedge p_2)$ Nu impliceert $p_1 \wedge p = p_2 \wedge p$ dat $p_1 \wedge p = (p_1 \wedge p_2) \wedge p$ bijgevolg zal dus $p_0 \wedge p = 0$ zijn. Passen we dan (i) toe op p_0 dan zal $p_1 = p_1 \wedge p_2$, volledig analoog bekomen we zo dat ook $p_2 = p_1 \wedge p_2$ en dus zal $p_1 = p_2$. ■

Propositie 1.42 *Zij $a, b \in \bar{M}$, als E een τ-dichte deelruimte is van $\mathcal{H}$ bevat in $D(a) \cap D(b)$ en $a|_E = b|_E$ Dan zal $a = b$.*

Bewijs:
Beschouw daarvoor de Hilbertruimte $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ en de bijhorende von Neumann-algebra $M_2 = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix}$ uitgerust met het normaal, trouw en semi-eindig spoor τ_2 gedefinieerd door:

$$\tau_2 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \tau(x_{11}) + \tau(x_{22})$$

We berekenen eerst en vooral M_2', Stel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

als een willekeurig element uit M_2, dus $a, b, c, d \in M$, dan laten we deze matrix, commuteren met een matrix van de volgende vorm, waarbij $x, y, z, u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

Dan moeten we dus gelijkheid verkrijgen tussen de volgende matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+uc & zb+ud \end{pmatrix}$$

Dat levert ons dus de volgende gelijkheden op:

$$ax + bz = xa + yc \tag{1.5}$$
$$cx + dz = za + uc \tag{1.6}$$
$$ay + bu = xb + yd \tag{1.7}$$
$$cy + du = zb + ud \tag{1.8}$$

Omdat deze vergelijkingen altijd moeten geleden, dus voor een willekeurige $a, b, c, d \in M$ kunnen we deze waarden zodanig kiezen dat we weten waaraan x, y, z, u moeten voldoen. Kies namelijk

- In (1.6) $c = d = 0$, $a = 1$ dan volgt dat $z = 0$.
- In (1.6) $c = 1$, omdat nu al $z = 0$ volgt er: $x = u$
- In (1.8) $d = 0, c = 1$, omdat $z = 0$ krijgen we $y = 0$

We houden dus enkel nog twee vergelijkingen over (1.5) en (1.8) reduceren zich namelijk tot:

$$ax = xa$$
$$du = ud$$

Opdat dus

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \in M_2'$$

Moet dus $z, y = 0$ en $x = u \in M'$.

Noteer met p_a en p_b de projecties op de grafieken $G(a)$ en $G(b)$ van a en b. Omdat a en b geaffilieerd zijn met M zijn $G(a)$ en $G(b)$ invariant onder alle elementen van M_2', met

$$M_2' = \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} | y \in M' \right\}$$

We tonen dit laatste enkel aan voor $a \eta M$ dan zou dus

$$G(a) = \{(\xi, a\xi) | \xi \in D(a)\}$$

invariant moeten zijn onder M_2', dit volgt uit hetvolgende:

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ a\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\xi \\ ya\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\xi \\ ay\xi \end{pmatrix} \in G(a)$$

Bijgevolg gaan de projecties p_a en p_b met elk element uit M_2' commuteren en dus tot $M_2'' = M_2$ behoren.

Zij nu $\delta > 0$ dan bestaat er een projectie $p \in M$ zodanig dat $p\mathcal{H} \subseteq E$ en $\tau(1-p) \leq \delta/2$ stel dan $p_2 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$. Dan zal $\tau_2(1-p_2) \leq \delta$. Verder zullen a en b gelijk zijn op $p\mathcal{H} \subseteq E \subseteq D(a) \cap D(b)$ en dus zal

$$\begin{aligned} G(a) \cap (p\mathcal{H} \oplus p\mathcal{H}) &= \{(\xi, a\xi) \,|\, \xi \in p\mathcal{H}, a\xi \in p\mathcal{H}\} \\ &= \{(\xi, b\xi) \,|\, \xi \in p\mathcal{H}, b\xi \in p\mathcal{H}\} \\ &= G(b) \cap (p\mathcal{H} \oplus p\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Bijgevolg is dus $p_a \wedge p_2 = p_b \wedge p_2$ Uit lemma 1.41 kunnen we dan concluderen dat $p_a = p_b$ en dus ook $a = b$. ■

1.7.4 τ-pré-meetbaarheid

Aan de hand van de vorige sectie kunnen we nu een alternatieve definitie voor τ-meetbare operatoren formuleren.

Definitie 1.43 *$a \in \bar{M}$ wordt τ-meetbaar genoemd als $D(a)$ τ-dicht is d.w.z. dat voor elke $\delta > 0$ er een $p \in M_{proj}$ bestaat, zodanig dat*

$$p\mathcal{H} \subseteq D(a) \;\; en \;\; \tau(1-p) \leq \delta$$

We noteren de τ-meetbare operatoren uit $\bar{M}$ met $\tilde{M}$.

Gevolg 1.44 *i. Als $a, b \in \tilde{M}$ en $a \subseteq b$ dan zal:*

$$a = b$$

ii. Als $a \in \tilde{M}$ en a is symmetrisch (d.w.z. $a \subseteq a^*$) dan zal a zelftoegevoegd zijn.

Bewijs:
Dit bewijs is een rechtstreeks gevolg van definitie 1.43 en propositie 1.42, want twee operatoren, die op een τ-dicht deel samenvallen moeten gelijk zijn. ■

We vermelden volgende stelling zonder bewijs:

Stelling 1.45 (Van de gesloten grafiek)

$$a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow D(a) = \mathcal{H} \; en \; a = gesloten$$

Wanneer we nu gebruik maken van de bovenstaande stelling, dan volgt er dat voor een gesloten operator a en een projectie p (zodat $p\mathcal{H} \subseteq D(a)$) ap overal gedefinieerd is, kiezen we dan bovendien een rij $(\xi_n)_n \in \mathcal{H}$ met $\xi_n \to \xi$ dan zal omdat p een projectie operator, en dus gesloten is: $p\,\xi_n \to p\,\xi$. Omdat nu a gesloten is zal dan ook $ap\,\xi_n \to ap\,\xi$, en dus is ap gesloten, bijgevolg vertelt de stelling van de gesloten grafiek ons dat ap dus noodzakelijk begrensd zijn. De volgende definitie is dan ook een veralgemening van definitie 1.43.

Definitie 1.46 *Een willekeurige operator $a\,\eta\,M$ wordt* τ-pré-meetbaar *genoemd als voor elke $\delta > 0$ er een projectie $p \in M$ bestaat zodat*

$$p\mathcal{H} \subseteq D(a)\,,\ \|ap\| < \infty \ \ en\ \ \tau(1-p) \leq \delta.$$

Propositie 1.47 *Als $a\,\eta\,M$ en a τ-pré-meetbaar dan zal a dicht gedefinieerd zijn.*

Bewijs:
Wegens definitie 1.46 zal $D(a)$ τ-dicht gedefinieerd zijn, uit gevolg 1.39 volgt dan dat $D(a)$ dicht is in $\mathcal{H}$. ■

Opmerkingen:

- Als $a\,\eta\,M$ dan hebben we de volgende equivalentie:

$$a = \tau\ pré - meetbaar \Leftrightarrow \forall\delta > 0, \exists\epsilon > 0 : a \in D(\epsilon, \delta)$$

- Het is onmiddellijk duidelijk, gebruikmakend van de stelling van de gesloten grafiek dat de τ-meetbaarheid van een operator ook de τ-pré-meetbaarheid impliceert. Omgekeerd geldt dat niet altijd, de enige eis die uit definitie 1.46 weggelaten is in verhouding tot definitie 1.43 is de geslotenheid van de operator a, de geslotenheid is vervangen door de zwakkere eis dat $\|ap\| < +\infty$.

Uit de keuze van de naam alleen al is het duidelijk dat er een verband moet zijn tussen de sluitbaarheid (*pré-closed*) en de pré-meetbaarheid (*pré-measurable*) van een willekeurige operator, vandaar de volgende propositie:

Propositie 1.48 *Zij $a\,\eta\,M$, τ-pré-meetbaar en sluitbaar, dan zal:*

$$[a] \in \tilde{M}$$

dus $[a]$ is τ-meetbaar.

Bewijs:
Aangezien dan $[a]$ gesloten is en uit propositie 1.34 volgt dat als $a \in D(\epsilon, \delta) \Rightarrow [a] \in D(\epsilon, \delta)$, zal $[a] \in \tilde{M}$. ■

Propositie 1.49 *Zij $a, b\,\eta\,M$ en τ-pré-meetbaar. Dan zullen de som $a + b$ en de samenstelling ab ook τ-pré-meetbaar zijn.*

BEWIJS:
We gaan dit enkel aantonen voor de vermenigvuldiging, de optelling verloopt op een analoge manier, we maken hier gebruik van de opmerkingen na propositie 1.47:
Zij $\delta > 0$, aangezien a, b τ-pré-meetbaar zijn volgt er dat:

$$\exists \epsilon_1 > 0 \ zodat \ a \in D(\epsilon_1, \delta/2)$$

$$\exists \epsilon_2 > 0 \ zodat \ b \in D(\epsilon_2, \delta/2)$$

Wanneer we dan gewoon ϵ gelijk stellen aan $\epsilon_1.\epsilon_2$ dan zal $ab \in D(\epsilon, \delta)$ aangezien

$$ab \in D(\epsilon_1, \delta/2).D(\epsilon_2, \delta/2) \subseteq D(\epsilon_1.\epsilon_2, \delta/2 + \delta/2) = D(\epsilon, \delta).$$

■

We krijgen nu de volgende equivalente representaties van τ-meetbare operatoren.

Propositie 1.50 *Stel $a \in \bar{M}$ met polaire decompositie $a = u|a|$. Dan zijn de volgende karakterizaties equivalent:*

i. a *is τ-meetbaar.*

ii. $|a|$ *is τ-meetbaar*

iii. $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : a \in D(\epsilon, \delta)$

iv. $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta$

v. $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \to 0 \ als \ \lambda \to \infty$

vi. $\exists \lambda > 0 \ zodat \ \tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) < \infty$

BEWIJS:

- de eerste drie equivalenties zijn nagenoeg triviaal.
- (iii) ⇔ (iv) Hiervoor passen we lemma 1.35 toe
- (iv) ⇔ (v) ⇔ (vi) Hierbij maken we gebruik van hetvolgende:

  $$\chi_{]\eta,\infty[}(|a|) \leq \chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|) \ \ voor \ \eta \geq \epsilon$$

  en dus

  $$\tau(\chi_{]\eta,\infty[}(|a|)) \leq \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \ \ voor \ \eta \geq \epsilon.$$

  Aangezien nu:

  $$\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|) \searrow \varnothing \ \ als \ \ \lambda \to \infty$$

  Volgt er uit de normaliteit van τ dat als er een $\lambda_0 > 0$ bestaat waarvoor $\tau(\chi_{]\lambda_0,\infty[}(|a|)) < \infty$ dat:

  $$\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \to 0 \ als \ \lambda \to \infty$$

  Hieruit volgt natuurlijk het gevraagde. ■

1.7.5 Bewijs van de Stelling 1.28

Dit is dus het laatste theoretische stukje van hoofdstuk 1, waarin we stelling 1.28 gaan aantonen. Na dit deel komen opnieuw onze twee specifieke voorbeelden weer aan bod, en gaan we voor deze von Neumann-algebra met hun spoor, de τ-meetbare operatoren zoeken.

Lemma 1.51

$$M \subseteq \tilde{M}$$

Bewijs:
Als a begrensd is volgt er uit de spectraalstelling dat $\chi_{]\,\|a\|,\infty[}(|a|) = 0$, propositie 1.50 levert ons dan het gevraagde. ■

Propositie 1.52 *Als $a \in \tilde{M}$ dan zal ook $a^* \in \tilde{M}$.*

Bewijs:
Gebruikmakend van propositie 1.36 en propositie 1.50 verkrijgen we:

$$\begin{aligned} a \in \tilde{M} &\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \,:\, a \in D(\epsilon, \delta) \\ &\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \,:\, a^* \in D(\epsilon, \delta) \\ &\Leftrightarrow a^* \in \tilde{M} \end{aligned}$$

■

Propositie 1.53 *i. Als $a, b \in \tilde{M}$. Dan zullen $a + b$ en ab dicht gedefinieerd en sluitbaar zijn , en $[a + b], [ab] \in \tilde{M}$.*

ii. $\tilde{M}$ is een *-algebra voor de sterke som en het sterk produkt.

Bewijs:

i. Als $a, b \in \tilde{M}$. Dan zullen ook $a^*, b^* \in \tilde{M}$. Uit propositie 1.49 volgt dan dat $a + b$ en $a^* + b^*$ τ-pré-meetbaar zullen zijn. In het bijzonder zijn ze ook dicht gedefinieerd, bijgevolg zal dus $(a^* + b^*)^*$ bestaan en zal $a + b \subseteq (a^* + b^*)^*$, in het bijzonder is $a + b$ dus ook sluitbaar, en zal dus $[a + b] \in \tilde{M}$. Voor het sterk produkt gebruiken we een analoge redenering.

ii. Stel $a, b, c \in \tilde{M}$, uit propositie 1.49 volgt dan dat ook dfe volgende operatoren τ-pré-meetbaar zijn:

$$a + b + c\,,\; abc\,,\; ac + bc\,,\; ca + cb\,,\; a^* + b^*\,,\; b^*a^*$$

Uit puntje (i.) volgt dat elk van deze bovenstaande operatoren een uitbreiding bepaalt die in $\tilde{M}$ zal liggen. Uit propositie 1.42 volgt dan dat de volgende gelijkheden zullen gelden gelden:

$$[[a + b] + c] = [a + [b + c]], [[ab]c] = [a[bc]],$$

$$[[a + b]c] = [[ac] + [bc]], [c[a + b]] = [[ca] + [cb]],$$

$$[a + b]^* = [a^* + b^*], [ab]^* = [b^*a^*].$$

■

Notatie: Om geen oververzadiging aan notatie te verkrijgen laten we vanaf nu [ ] weg in de notatie voor de sterke som en het sterk produkt.

Definitie 1.54 *Voor elke $\epsilon, \delta > 0$ stellen we*

$$N(\epsilon, \delta) = \tilde{M} \cap D(\epsilon, \delta).$$

In feite is dus $N(\epsilon, \delta)$ de set van τ-meetbare operatoren $a \in \bar{M}$ waarvoor er een projectie $p \in M$ bestaat zodanig dat

$$\|ap\| \leq \epsilon \ \textit{en} \ \tau(1-p) \leq \delta.$$

Lemma 1.55 *$\forall \epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \delta, \delta_1, \delta_2 > 0$ en $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ verkrijgen we:*

i. $N(\epsilon, \delta)^* = N(\epsilon, \delta)$,

ii. $N(|\lambda|\epsilon, \delta) = \lambda N(\epsilon, \delta)$,

iii. $\epsilon_1 \leq \epsilon_2, \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow N(\epsilon_1, \delta_1) \subseteq N(\epsilon_2, \delta_2)$,

iv. $N(\epsilon_1, \delta_1) \cap N(\epsilon_2, \delta_2) \supseteq N(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2, \delta_1 \wedge \delta_2)$,

v. $N(\epsilon_1, \delta_1) + N(\epsilon_2, \delta_2) \subseteq N(\epsilon_1 + \epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$,

vi. $N(\epsilon_1, \delta_1) N(\epsilon_2, \delta_2) \subseteq N(\epsilon_1 \epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$.

Bewijs:
(Met $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$ wordt hier het minimum van ϵ_1 en ϵ_2 bedoeld.) Het is nagenoeg triviaal om deze dingen na te gaan, ze volgen uit analoge eigenschappen voor de $D(\epsilon, \delta)$ en $\tilde{M}$ verzamelingen (cfr. propositie 1.36 en 1.34). Puntje (v) en (vi) moeten wel in de sterke zin geïnterpreteerd worden. ■

Propositie 1.56 *De $N(\epsilon, \delta)$, voor $\epsilon, \delta > 0$ verzamelingen, vormen een basis van omgevingen voor 0. Zodat we van $\tilde{M}$ een topologische vektorruimte kunnen maken.*

Bewijs:
Eerst halen we een aantal gekende begrippen op uit de Topologie ([15]). De omgevingen van 0 worden bekomen door de oververzamelingne van de $N(\epsilon, \delta)$ te beschouwen, stel de verzameling van omgevingen rond 0 gelijk aan $\mathcal{V}(0)$, dan tonen we aan dat deze oververzamelingen wel degelijk aan de omgevingen axioma's gaan voldoen.
i. Zij $V \in \mathcal{V}(0), \exists N(\epsilon, \delta)$ zodat $N(\epsilon, \delta) \subset V$ en $0 \in N(\epsilon, \delta) \subset V$.
ii. Als $A \subset \tilde{M}$ en $\exists V \in \mathcal{V}(0)$ zodat $V \subset A$ dan $\exists N(\epsilon, \delta)$ met $N(\epsilon, \delta) \subset V \subset A$ en dus is ook $A \in \mathcal{V}(0)$.
iii. Zij $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(0), \exists N(\epsilon_1, \delta_1), N(\epsilon_2, \delta_2)$ met $N(\epsilon_1, \delta_1) \subset V_1, N(\epsilon_2, \delta_2) \subset V_2$ Dan zal $N(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2, \delta_1 \wedge \delta_2) \subset N(\epsilon_1, \delta_1) \cap N(\epsilon_2, \delta_2) \subset V_1 \cap V_2$ en dus zal ook $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(0)$

We weten nu dus al dat de $N(\epsilon, \delta)$ verzamelingen een topologie op de vectorruimte $\tilde{M}$ bepalen, opdat dit echter een topologische vectorruimte zou vormen, moeten de sterke som en het cartesisch produkt continu zijn voor deze topologie.
De continuïteit van de som volgt uit het feit dat

$$N(\epsilon_1, \delta_1) + N(\epsilon_2, \delta_2) \subseteq N(\epsilon_1 + \epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$$

De continuïteit van de scalaire vermenigvuldiging volgt uit het feit dat

$$N(|\lambda|\epsilon, \delta) = \lambda N(\epsilon, \delta)$$

■

Stelling 1.57 *$\tilde{M}$ is een volledige topologische Hausdorff *-algebra, waarin M dicht is.*

Bewijs:

i. Om aan te tonen dat $\tilde{M}$ Hausdorff is gaan we aantonen dat

$$\bigcap_{\epsilon,\delta>0} N(\epsilon, \delta) = \{0\}$$

Stel $a \in \bigcap_{\epsilon,\delta>0} N(\epsilon, \delta)$ Dan verkrijgen we volgens lemma 1.35 dat

$$\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0 : \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta$$

Aangezien τ trouw is impliceert dit dat $\forall \epsilon > 0 : \ \chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|) = 0$ en dus zal omdat al de spectrale projectieoperatoren nul zijn $a = 0$.

ii. Vervolgens tonen we aan dat $\tilde{M}$ een topologische *-algebra vormt. We hebben al dat $\tilde{M}$ een topologische vectorruimte vormt, we moeten dus enkel nog aantonen dat de hermitische toevoeging en de sterke vermenigvuldiging nog continue afbeelding zijn. Uit lemma 1.55 (i) volgt dat de toegevoegde operatie continu is. Voor de vermenigvuldinging: Zij $a_0, b_0 \in \tilde{M}$ en zij $\epsilon, \delta > 0$. Neem dan $\mu, \lambda > 0$ zodanig dat:

$$a_0 \in N(\mu, \delta), b_0 \in N(\lambda, \delta).$$

Dan krijgen we voor elke $a, b \in \tilde{M}$ waarvoor $a - a_0, b - b_0 \in N(\epsilon, \delta)$ dat:

$$\begin{aligned} ab - a_0 b_0 &= (a - a_0)(b - b_0) + a_0(b - b_0) + (a - a_0)b_0 \\ &\in N(\epsilon, \delta)N(\epsilon, \delta) + N(\mu, \delta)N(\epsilon\delta) + N(\epsilon, \delta)N(\lambda, \delta) \\ &\subseteq N(\epsilon^2, 2\delta) + N(\mu\epsilon, 2\delta) + N(\lambda\epsilon, 2\delta) \\ &\subseteq N(\epsilon(\epsilon + \lambda + \mu), 6\delta). \end{aligned}$$

Er geldt dus dat de afbeelding:

$$(a, b) \mapsto ab$$

continu is.

iii. M is dicht in $\tilde{M}$. Dat wil zeggen dat elk element uit $\tilde{M}$ willekeurig dicht door elementen uit M kan benaderd worden, en dit voor de topologie die op $\tilde{M}$ ligt. Want zij $a \in \tilde{M}$, en neem projecties $p_n \in M$ zodanig dat:

$$p_n \nearrow 1, \tau(1 - p_n) \to 0 \ \textit{en} \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n\mathcal{H} \subseteq D(a)$$

Dan zal $ap_n \in M$ en

$$ap_n \to a \ \textit{in} \ \tilde{M}$$

Aangezien $\|(ap_n - a)p_m\| = 0$ voor alle $n \geq m$ en $\tau(1 - p_m) \to 0$ als $m \to \infty$.

iv. Als laatste gaan we aantonen dat de topologische vectorruimte $\tilde{M}$ volledig is. Aangezien $\tilde{M}$ een aftelbare omgevingenbasis van 0 heeft (gebruik daarvoor bv. $N(1/n, 1/m), n, m \in \mathbb{N}$) moeten we enkel aantonen dat elke Cauchy rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\tilde{M}$ convergeert. Zij $(a_n)_n$ een Cauchy rij in $\tilde{M}$.

Aangezien M dicht is in $\tilde{M}$, mogen we aannemen dat alle $a_n \in M$ (Wanneer dat niet zo is kunnen we elke a_n vervangen door een $a'_n \in M$ zodat $a_n - a'_n \in N(1/n, 1/n)$, dan volgt er dat $(a'_n)_{n\in N}$ convergeert als en slechts als $(a_n)_n$ convergeert. Dan kunnen we van deze rij overgaan naar een deelrij met de volgende eigenschap:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n \in N(2^{-(n+1)}, 2^{-n})$$

Neem dan nu projecties $p_n \in M$ met de volgende eigenschappen:

$$\|(a_{n+1} - a_n)p_n\| \leq 2^{-(n+1)} \ \ en \ \ \tau(1 - p_n) \leq 2^{-n}$$

Stel dan voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$q_n = \wedge_{k=n+1}^{\infty} p_k$$

Dan zal ook:

$$\tau(1 - q_n) = \tau(\vee_{k=n+1}^{\infty}(1 - p_k)) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \tau(1 - p_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}$$

en

$$\forall m \geq n + 1, \forall l \in \mathbb{N} : \|(a_{m+l} - a_m)q_n\| \leq 2^{-m}$$

Dit laatste volgt omdat $q_n \leq p_k$ voor alle $k \geq m \geq n + 1$ en bijgevolg levert dat:

$$\begin{aligned} \|(a_{m+l} - a_m)q_n\| &\leq \sum_{k=m}^{m+l-1} \|(a_{k+1} - a_k)q_n\| \\ &\leq \sum_{k=m}^{m+l-1} \|(a_{k+1} - a_k)p_k\| \\ &\leq \sum_{k=m}^{m+l-1} 2^{-(k+1)} \leq 2^{-m} \end{aligned}$$

Zij $\xi \in \cup_{n\in\mathbb{N}} q_n\mathcal{H}$ dan zal $\xi \in q_n\mathcal{H}$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$ groot genoeg, en bijgevolg volgt uit het voorgaande dat $(a_m\xi)_{m\in\mathbb{N}}$ een cauchy rij in $\mathcal{H}$ vormt. Stel dan

$$a\xi := \lim_{m\to\infty} a_m\xi$$

We hebben nu een operator a op $D(a) = \cup_{n\in\mathbb{N}} q_n\mathcal{H}$ gedefinieerd, merk op dat $D(a)$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{H}$ is omdat $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een stijgende rij projecties vormt.

Uit de constructie volgt nu dat de operator a τ pré-meetbaar zal zijn, aangezien voor alle $n \in \mathbb{N}$ we hebben dat $q_n\mathcal{H} \subseteq D(a)$ en bovendien $\tau(1 - q_n) \leq 2^{-n}$. Nu tonen we nog aan dat de operator a sluitbaar is. Om dit aan te tonen passen we

dezelfde argumenten als hierboven toe op de rij $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ bijgevolg bestaat er een τ-pré-meetbare operator b zodanig dat

$$b\eta = \lim_{m\to\infty} a_n^*\eta, \eta \in D(b)$$

Dat levert ons hetvolgende: $\forall\xi \in D(a), \forall\eta \in D(b)$

$$\begin{aligned} < a\xi, \eta > &= \lim_{m\to\infty} < a_m\xi, \eta > \\ &= \lim_{m\to\infty} < \xi, a_m^*\eta > \\ &= < \xi, b\eta > \end{aligned}$$

Bijgevolg is dus $a \subseteq b^*$ met b^* gesloten en dus is de operator a sluitbaar, uit propositie 1.48 volgt dan dat $[a] \in \tilde{M}$ Stel dan $a_0 = [a]$.

Dan gaan we nu uiteindelijk aantonen dat $a_n \to a_0$ in $\tilde{M}$. Stel $\epsilon, \delta > 0$. Neem $n_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $2^{-(n_0+1)} \leq \epsilon$ en $2^{-n_0} \leq \delta$. Dan verkrijgen we voor alle $m \geq n_0 + 1$ dat:

$$\|(a_0 - a_m)q_{n_0}\| \leq 2^{-(n_0+1)} \leq \epsilon$$

en

$$\tau(1 - q_{n_0}) \leq 2^{-n_0} \leq \delta$$

Dit voorgaande volgt uit het feit dat:

$$\forall\xi \in \mathcal{H} : (a_0 - a_m)q_{n_0}\xi = \lim_{l\to\infty}(a_{m+l} - a_m)q_{n_0}\xi$$

en

$$\|(a_{m+l} - a_m)q_{n_0}\| \leq 2^{-m} \leq 2^{-(n_0+1)} \leq \epsilon$$

bijgevolg zal dus:

$$\forall m \geq n_0 + 1 : a_0 - a_m \in N(\epsilon, \delta)$$

en zo verkrijgen we dus het gevraagde. ■

1.8 Algemene voorbeelden

In dit korte paragraafje zoeken we voor twee expliciete gevallen de verzameling van de meetbare operatoren.

Stelling 1.58 *Als τ eindig is dan zal $\bar{M} = \tilde{M}$*

Bewijs:
We gaan hier aantonen dat alle gesloten, dicht gedefinieerde operatoren, geaffilieerd aan M, τ-meetbaar zullen zijn.

De inclusie $\tilde{M} \subseteq \overline{M}$ is nagenoeg triviaal, rest er ons alleen de omgekeerde inclusie nog om aan te tonen. Neem $a \in \overline{M}$ om na te gaan gebruiken we puntje (vi) uit de propositie 1.50. Omdat nu τ eindig is zal

$$\forall\lambda : \quad \tau(\chi_{]\lambda,+\infty[}(|a|)) < +\infty$$

en dus verkrijgen we $\overline{M} \subseteq \tilde{M}$. ■

Definitie 1.59 *Noteer met $(e_i)_{i\in I}$ een willekeurige basis van de Hilbertruimte $\mathcal{H}$, dan wordt het* gewone spoor *op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ als volgt gedefinieerd:*

$$Tr(a) = \sum_{i\in I} < ae_i, e_i >$$

We moeten hierbij wel opmerken dat deze definitie onafhankelijk is van de gekozen basis $(e_i)_i$, voor een willekeurige andere basis bekomen we hetzelfde spoor. En $Tr(.)$ vormt dan een semi-eindig, trouw en normaal spoor op $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ([3] I,6,6) Bovendien geeft dit spoor toegepast op een projectieoperator, de dimensie van de ruimte waarop deze operator projecteert.

Stelling 1.60 *Als $M = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en τ is het gewone spoor $Tr(.)$, dan zal $\tilde{M} = M$.*

Bewijs:
De inclusie $M \subseteq \tilde{M}$ is duidelijk. Stellen we nu $a \in \tilde{M}$. Dan volgt uit propositie 1.50, dat $\exists \epsilon > 0$ zodanig dat

$$Tr(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|)) < \delta$$

Omdat $\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|)$ nu dus een projectie operator is die projecteert op een deelruimte van dimensie 0, zal

$$\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|) = 0$$

Bijgevolg is a begrensd en zal dus $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) = M$. ■

1.9 Toepassing op $M_n(\mathbb{C})$ en $L^\infty(X, \mu)$.

1.9.1 $M_n(\mathbb{C})$ met het gewone spoor

Voor $M_n(\mathbb{C})$ is het bijzonder eenvoudig om de meetbare operatoren terug te vinden. Aangezien $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ en $tr(.)$ het gewone spoor op $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ definieert kunnen we onmiddellijk stelling 1.59 uit de voorgaande voorbeelden toepassen en verkrijgen we dus dat $\widetilde{M_n}(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.

1.9.2 Meetbare operatoren van $L^\infty(X, \mu)$

Stelling 1.61 *Zij (X, Ω, μ) een σ-eindige maatruimte en beschouw $L^\infty(X, \mu)$ als von Neumann-algebra over $L^2(X, \mu)$ dan zal een operator a geaffilieerd aan M corresponderen met een vermenigvuldigingsoperator T_f op $L^2(X, \mu)$, waarbij f een meetbare functie is.*

Bewijs:
We gaan hier analoog als in stelling 1.30 dit bewijs opdelen in twee stappen, namelijk $\mu(X) < +\infty$ en $\mu(X) = +\infty$, aangezien de tweede stap in essentie volledig analoog als in stelling 1.30 zal verlopen, hebben we hier enkel het geval $\mu(X) < +\infty$ behandeld.

Beschouwen we een operator a, met polaire decompositie $a = u|a|$ aangezien

$$a \,\eta\, M \Leftrightarrow u \in M \text{ en } |a| \,\eta\, M$$

zal het dus volstaan om met een positieve operator a te gaan werken.

$a \, \eta \, L^\infty(X,\mu)$ stemt overeen met het feit dat we in de spectrale decompositie $E(\Delta) \in L^\infty(X,\mu)$ (Waarbij Δ een element is van de σ-algebra over X) Stel dan:

$$a = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

Definieer dan $a_n = \int_{[0,n]} \lambda dE(\lambda)$ dan geldt er dat $a_n \nearrow a$ en $a_n \in L^\infty(X,\mu)$ en dus met een vermenigvuldigingsoperator T_{α_n} overeenstemt, voor α_n als meetbare functie in $L^\infty(X,\mu)$. Dan zal dus $\alpha_n \nearrow \alpha$ met α dus een meetbare, niet noodzakelijk begrensde functie. We tonen hier nog kort aan dat a_n wel degelijk tot $L^\infty(X,\mu)$ zal behoren. Omdat

$$ya_n = yaE(n) \subseteq ayE(n) = aE(n)y = a_n y$$

en a_n begrensd is zal dus a_n tot M moeten behoren.

We moeten nu nog twee dingen verifiëren namelijk dat $\alpha\xi \in L^2(X,\mu)$ en dat $a(\xi) = \alpha.\xi$ en dit voor elke $\xi \in D(a)$

- Omdat $\xi \in D(a) : \int_{\mathbb{R}^+} |\lambda|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) = \|a\xi\|_2^2 < +\infty$ bijgevolg verkrijgen we, wegens de monotone convergentiestelling:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} |\lambda|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} |\lambda|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a_n\xi\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n\xi\|^2 \\ &= \|\alpha\xi\|^2\end{aligned}$$

  Bijgevolg is dus $\|\alpha\xi\|_2^2 < +\infty$ en dus moet $\alpha\xi \in L^2(X,\mu)$.

- Het laatste volgt uit het feit dat $a_n \nearrow a$, $\alpha_n \nearrow \alpha$ en

$$\begin{aligned}\|a\xi - \alpha\xi\| &\leq \|a\xi - a_n\xi\| + \|a_n\xi - \alpha_n\xi\| + \|\alpha_n\xi - \alpha\xi\| \\ &= \|a\xi - a_n\xi\| + \|\alpha_n\xi - \alpha\xi\| \longrightarrow 0 \; voor \; n \to \infty\end{aligned}$$

■

Nu zijn we klaar om een echte karakterizatie van de meetbare operatoren in het klassieke geval te geven, eerst gaan we dit opnieuw bekijken voor het geval we met een eindige maatruimte werken, d.w.z. $\mu(X) < +\infty$, daarna behandelen we het meer algemene σ-eindige geval. Maar vooraleer we die karakterizatie geven eerst nog volgend belangrijk lemma, dat nog zeer vaak gaat terugkomen, hier gaan we concreet de spectrale decompositie van een vermenigvuldigingsoperator berekenen.

In hetvolgende lemma, gaan we specifiek voor een vermenigvuldigingsoperator over een zekere maatruimte de spectrale projectieoperatoren zoeken.

Lemma 1.62 *Beschouw $L^\infty(X,\mu)$ als von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $L^2(X,\mu)$, waarbij (X,Ω,μ) een σ-eindige maatruimte voorstelt. Beschouw dan g :*

$X \to \mathbb{R}^+$ als een meetbare functie waarbij de vermenigvuldigingsoperator T_g gedefinieerd wordt door:

$$\begin{cases} D(T_g) &= \{f \in L^2(X,\mu) \,|\, gf \in L^2(X,\mu)\} \\ T_g f &= gf \quad \forall f \in D(T_g) \end{cases} \tag{1.9}$$

Dan zal voor de spectrale decompositie van de operator T_g gelden:

$$T_g = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dF(\lambda)$$

waarbij

$$F([0,t]) = T_{\chi_{\Delta_t}}$$

met

$$\Delta_t = \{x \in X \,|\, g(x) \leq t\}$$

Bewijs:
Stel $P_t = T_{\chi_{\Delta_t}}$ met $\Delta_t = \{x \in X \,|\, g(x) \leq t\}$ dan gaan we aantonen dat P_t een spectrale maat definieert en dat we T_g op de volgende wijze kunnen schrijven: $T_g = \int_{\mathbb{R}^+} t dP_t$ want dan volgt uit de uniciteit van de spectrale maat het gevraagde namelijk dat $F([0,t]) = T_{\chi_{\Delta_t}}$.

- P_t definieert een spectrale maat:

  i. P_t definieert voor elke t een projectie, dit is nagenoeg triviaal.

  ii. P_t is stijgend, dat volgt omdat Δ_t stijgend is en $\lim_{t\to+\infty} P_t = 1$ omdat $\Delta_t \nearrow X$ en $P_{0^-} = 0$.

  iii. Als laatste moeten we dan nog aantonen dat P_t rechtscontinu is d.w.z. dat voor $t_n \searrow t$ de sterke limiet $\lim_{n\to+\infty} P_{t_n}$ gelijk is aan P_t. Dat wil zeggen dat voor elke f uit $L^2(X,\mu)$:

  $$\|P_{t_n} f - P_t f\|_2 \to 0 \;\; voor \;\; n \to +\infty$$

  Dit laatste komt neer op aantonen dat voor $n \to +\infty$

  $$\|P_{t_n} f - P_t f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^+} |f|^2 \chi_{E_n} \, d\mu \to 0$$

  waarbij $E_n = \{x \in X \,|\, t < g(x) \leq t_n\}$. Om dit laatste aan te tonen gebruiken we de gedomineerde convergentiestelling want $E_n \searrow \emptyset$ en bijgevolg zal dus $|f|^2\chi_{E_n} \to 0$ puntsgewijs. Omdat nu ook voor elke n: $|f|^2\chi_{E_n} \leq |f|^2$ levert de gedomineerde convergentiestelling uit de maattheorie ons:

  $$\int_{\mathbb{R}^+} |f|^2 \chi_{E_n} \to 0$$

- In dit punt tonen we aan dat $\int_{\mathbb{R}^+} t dP_t = T_g$. Om aan te tonen dat de twee operatoren volledig identiek aan elkaar gaan zijn, moeten we in essentie twee dingen nagaan, eerst en vooral moeten ze op hetzelfde domein gedefinieerd zijn, en bovendien moeten ze dezelfde werking hebben op elementen uit dit domein. We splitsen het bewijs dan ook op in twee delen.

– We tonen de gelijkheid van de domeinen aan:

$$D(T_g) = \Big\{ f \in L^2(X,\mu) \,\Big|\, gf \in L^2(X,\mu) \Big\}$$

en

$$D\Big(\int_{\mathbb{R}^+} t\, dP_t\Big) = \Big\{ f \in L^2(X,\mu) \,\Big|\, \Big(\int_{\mathbb{R}^+} t dP_t\Big) f \,\in\, L^2(X,\mu) \Big\}$$

We tonen aan dat voor een functie f uit $L^2(X,\mu)$ we volgende gelijkheid bekomen:

$$\Big\| \Big(\int_{\mathbb{R}^+} t\, dP_t\Big) f \Big\|_2 = \|gf\|_2$$

Daarvoor beschouwen we de trapfunctie

$$s_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

met s_n op volgende manier gedefinieerd:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\, \chi_{]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}$$

Deze trapfunctie is monotoon stijgend en $s_n \nearrow 1$, gebruikmakend van deze stijgende trapfunctie verkrijgen we dan het volgende:

$$\begin{aligned}
& \Big\| \Big(\int_{\mathbb{R}^+} t\, dP_t\Big) f \Big\|_2 \\
= & \int_{\mathbb{R}^+} t^2\, d < P_t f\,,\, f > \\
= & \sup_n \int_{\mathbb{R}^+} (s_n)^2\, d < P_t f\,,\, f > \\
= & \sup_n \sum_{k=1}^{n2^n} \Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)^2 \Big[< P_{\frac{k}{2^n}} f\,,\, f > - < P_{\frac{k-1}{2^n}} f\,,\, f > \Big] \\
= & \sup_n \sum_{k=1}^{n2^n} \Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)^2 \int_X |f(x)|^2\, \chi_{E_k}(x) d\mu
\end{aligned}$$

Waarbij dan

$$E_k = \Big\{ x \in X \,\Big|\, g(x) \in \Big]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big] \Big\}$$

Stel dan

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k}(x)$$

In het bijzonder zal dan $g_n \nearrow g$ en verkrijgen we , verdergaand op de voorgaande vergelijking:

$$\begin{aligned}
= & \sup_n \int_X |f(x)|^2\, g_n(x)\, d\mu \\
= & \int_X |f(x) g(x)|^2\, d\mu \\
= & \|gf\|_2
\end{aligned}$$

Zo verkrijgen we dus de gelijkheid van de domeinen.

– Om aan te tonen dat de operatoren dezelfde werking hebben op hun domein, moeten we aantonen dat voor alle $f_1, f_2 \in L^2(X,\mu)$ geldt:

$$< T_g f_1\ ,\ f_2 >=< \Big(\int_{\mathbb{R}^+} t dP_t \Big) f_1\ ,\ f_2 >$$

Wegens polarizatie zl het echter voldoende zijn om deze laatste gelijkheid aan te tonen voor $f_1 = f_2$, we moeten dus voor alle $f \in L^2(X,\mu)$ volgende gelijkheid verkrijgen:

$$< T_g f\ ,\ f >=< \Big(\int_{\mathbb{R}^+} t dP_t \Big) f\ ,\ f >$$

Uitgeschreven geeft deze laatste vergelijking ons hetvolgende:

$$\int_X g(x)|f(x)|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} d < P_t f, f >$$

en deze gelijkheid kunnen we aantonen met dezelfde technieken als het voorgaande puntje.

- Uit de twee voorgaande punten en wegens de uniciteit van de spectrale projectie verkrijgen we dan dat $F([0,t]) = T_{\chi_{\Delta_t}}$. ■

Propositie 1.63 *Noteer met (X,Ω,μ) een eindige maatruimte, d.w.z $\mu(X) < +\infty$. Stel $L^\infty(X,\mu)$ als von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$. Dan zal de verzameling van τ-meetbare operatoren overeenstemmen met de verzameling van alle meetbare functies $\mathcal{M}$.*

Bewijs:
Uit de voorgaande stelling van de geaffilieerdheid volgt dat $\tilde{M} \subseteq \mathcal{M}$. Voor de omgekeerde inclusie nemen we f als meetbare functie van $X \to \mathbb{R}$, dan moeten we nu aantonen dat $f \in \tilde{M}$. We gaan nu eerst de vermenigvuldigingsoperator $T_{|f|}$ in z'n spectrale vorm schrijven. Wegens lemma 1.62 zal $T_{|f|(x)}$ van de volgende vorm zijn (cfr. operatorentheorie [5]) :

$$\begin{aligned} T_{|f|(x)} &= \int_{\mathbb{R}^+} |f|(\lambda) dE(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} t dF(t) \end{aligned}$$

met $F(\Delta) = E(|f|^{-1}(\Delta))$, waarbij $E(\Delta) = T_{\chi_\Delta}$. Stel dan

$$\Delta_n = |f|^{-1}(]n, +\infty[)$$

dan vormt $(\Delta_n)_n$ een dalende rij meetbare verzamelingen met $\cap_n \Delta_n = \emptyset$. Omdat nu $\mu(X) < +\infty$ zal dan ook

$$\mu(\Delta_n) \longrightarrow 0 \ \ (n \to +\infty)$$

Dat levert ons dan hetvolgende:

$$\begin{aligned}\mu(\Delta_n) &= \mu(|f|^{-1}(]n,+\infty[)) \\ &= \int \chi_{|f|^{-1}(]n,+\infty[)}(x)d\mu(x) \\ &= \tau(T_{\chi_{|f|^{-1}(]n,+\infty[)}}) \\ &= \tau(E(|f|^{-1}(]n,+\infty[)) \\ &= \tau(F(]n,+\infty[))\end{aligned}$$

Bijgevolg zal $\tau(F(]\epsilon,+\infty[)) \to +\infty$ voor $\epsilon \to 0$ en dus zal de vermenigvuldigingsoperator T_f τ-meetbaar zijn. ■

Vooraleer we hetvolgende algemenere resultaat gaan aantonen moeten we eerst nog een nieuw soort convergentie invoeren.

Definitie 1.64 *Een rij meetbare functies $(f_n)_n$ op een maatruimte (X,Ω,μ) convergeert naar een meetbare functie f in maat, als $\forall\epsilon > 0$ de verzameling*

$$A_n^\epsilon = \{x \in X |\ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$

aan de volgende eis voldoet:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n^\epsilon) = 0$$

Propositie 1.65 *Zij (X,Ω,μ) een σ-eindige maatruimte met*

$$\tau(\,.\,) = \int_X .\, d\mu$$

als spoor op de von Neumann-algebra $L^\infty(X,\mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(X,\mu)$dan stemt de verzameling van alle τ-meetbare operatoren overeen met de sluiting van de verzameling begrensde functies $L^\infty(X,\mu)$ voor de convergentie in maat.

Bewijs:
We moeten het bewijs opsplitsen in twee richtingen, noteren we verder de sluiting van $L^\infty(X,\mu)$ voor de convergentie in maat met $\overline{L^\infty(X,\mu)}$ en de verzameling van de τ-meetbare operatoren met $\tilde{M}$:

- $\overline{\mathbf{L^\infty(X,\mu)}} \subseteq \tilde{\mathbf{M}}$
  Neem f een element uit $\overline{L^\infty(X,\mu)}$, dan bestaat er dus een rij van begrensde functies $(f_n)_n$ die dus in maat naar f gaan convergeren. dat wil dus zeggen dat voor A_n^ϵ gedefinieerd zoals hierboven met $\epsilon > 0$ geldt dat: $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n^\epsilon) = 0$.

  We gaan nu aantonen dat de functie $T_{|f_N - f|}$, voor een zekere N groot genoeg tot $\tilde{M}$ zal behoren, dan volgt er omdat $\tilde{M}$ een algebra is dat ook $T_f \in \tilde{M}$. Stel dus gebruikmakend van lemma 1.62

$$T_{|f_n-f|} = \int_{\mathbb{R}^+} |f_n - f|(\lambda)dE(\lambda)$$

met $E(\Delta) = T_{\chi_\Delta}$ dan zal:

$$T_{|f_n - f|} = \int_{\mathbb{R}^+} t dF(t)$$

met $F(\Delta) = E(|f_n - f|^{-1}(\Delta))$. We verkrijgen dan dat

$$\chi_{]\epsilon,+\infty[)}(T_{|f_n-f|}) = E(|f_n - f|^{-1}(]\epsilon, +\infty[))$$

Omdat nu

$$\begin{aligned}
\tau(E|f_n - f|^{-1}(]\epsilon, +\infty[)) &= \tau(T_{\chi_{|f_n-f|^{-1}(]\epsilon,+\infty[)}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{|f_n-f|^{-1}(]\epsilon,+\infty[)} d\mu \\
&= \mu(|f_n - f|^{-1}(]\epsilon, +\infty[)) \\
&= \mu(A_n^\epsilon)
\end{aligned}$$

Er rest ons dus nog aan te tonen dat $\mu(A_n^\epsilon) \to 0$ voor $\epsilon \to +\infty$ dit is niet onmiddellijk duidelijk omdat er in de definitie enkel vermeld wordt dat dit geldt voor $n \to +\infty$ we moeten hier dan ook teruggrijpen naar onze kennis vanuit de maatheorie.

Neem $(\epsilon_k)_k$ als een stijgende rij reële getallen, die naar $+\infty$ gaan streven. Uit de definitie van de convergentie in maat volgt dat er dan een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor

$$\mu(A_N^{\epsilon_0}) < +\infty$$

Omdat nu de rij $(A_N^{\epsilon_k})_k$ dalend is d.w.z.

$$\ldots \supseteq A_N^{\epsilon_{k-1}} \supseteq A_N^{\epsilon_k} \supseteq A_N^{\epsilon_{k+1}} \supseteq \ldots,$$

omdat

$$\cap_{k\in\mathbb{N}} A_N^{\epsilon_k} = \emptyset$$

en omdat

$$\mu(A_N^{\epsilon_0}) < +\infty$$

kunnen we besluiten dat

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_N^{\epsilon_k}) = 0$$

en dus ook

$$\lim_{\epsilon\to+\infty} \mu(A_N^{\epsilon}) = 0$$

dat levert het gevraagde, de functie $T_{|f_N-f|}$ zal dus τ-meetbaar zijn, wegens de karakterizaties zoals gezien in propositie 1.50 en dus is ook T_f τ-meetbaar.

- $\overline{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{X}, \mu)} \supseteq \tilde{\mathbf{M}}$ Stel dan T_f als een τ-meetbare operator, dan tonen we aan dat er een rij van functies $(f_n)_n$ in $L^\infty(X, \mu)$ bestaat zodat de rij in maat naar f zal convergeren. Stel dan $f_n = f\chi_{\Delta_n}$ met

$$\Delta_n = \{x \in X \,|\, |f(x)| < n\}$$

dan is $\|f_n\|_\infty < n$ en dus zal voor elke $n : f_n \in L^\infty(X,\mu)$. Er rest ons nu dus nog aan te tonen dat $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n^\epsilon\right) = \{x \,|\, |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 0 \tag{1.10}$$

Omdat

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= f(x)(1 - \chi_{\Delta_n}(x)) \\ &= f(x).\chi_{\Delta_n^c} \end{aligned}$$

zal $A_n^\epsilon \subseteq \Delta_n^c$ De rij $(A_n^\epsilon)_n$ is een dalende rij met een lege doorsnede bijgevolg volstaat het om aan te tonen dat $\mu(A_n^\epsilon) < +\infty$ voor n groot genoeg om de limiet in (1.10) te bekomen. We tonen aan dat $\mu(\Delta_n^c) < +\infty$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$ want dan zal ook $\mu(A_n^\epsilon) < +\infty$. We beschouwen opnieuw de spectrale decompositie van de vermenigvuldigingsoperator $T_{|f|}$ aan de hand van lemma 1.62:

$$T_{|f|} = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dF(\lambda)$$

met $F(\Delta) = E(|f|^{-1}(\Delta))$ met $E(\Delta) = \chi_\Delta$. Omdat T_f τ-meetbare is, bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$\tau(\chi_{]\lambda,+\infty[}|f|) < +\infty$$

We verkrijgen vervolgens:

$$\begin{aligned} \tau(\chi_{]\lambda,+\infty[}|f|) &= \tau(F(]\lambda,+\infty[)) \\ &= \tau(E(|f|^{-1}(]\lambda,+\infty[))) \\ &= \int \chi_{|f|^{-1}(]\lambda,+\infty[)} d\mu \\ &= \mu(\{x \,|\, |f(x)| > \lambda\}) < +\infty \end{aligned}$$

Kies dan $N \in \mathbb{N}$ met $N > \lambda$ dan verkrijgen we

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \{x \,|\, |f(x)| < N\} \\ \Delta_N^c &= \{x \,|\, |f(x)| \geq N\} \end{aligned}$$

bijgevolg zal

$$\mu(A_N^\epsilon) \leq \mu(\Delta_N^c) \leq \mu(\{x \,|\, |f(x)| > \lambda\}) < +\infty$$

hieruit kunnen we besluiten dat $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n^\epsilon\right) = \{x \,|\, |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

■

merk op:
We moeten nu wel opmerken dat niet alle meetbare functies, tot $\overline{L^\infty(X,\mu)}$ zullen behoren, dit illustreren we aan de hand van een zeer specifiek voorbeeld, we werken namelijk in de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}^+,\mu)$ met μ als lebesguemaat. Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x$$

We tonen aan dat deze operator niet τ-meetbaar is, beschouw zijn spectrale decompositie dan verkrijgen we dus:

$$T_x = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

met $E(\Delta) = T_{\chi_\Delta}$ Dan zal echter

$$\begin{aligned} \tau(E(]\epsilon, +\infty[)) &= \tau(\chi_{]\epsilon,+\infty[}) \\ &= \mu(]\epsilon, +\infty[) = +\infty \end{aligned}$$

Bijgevolg zal deze vermenigvuldigingsoperator nooit τ-meetbaar kunnen worden.

1.10 Meetbare operatoren en meetbare functies

Omdat we nu duidelijk hebben dat de verzameling van de τ-meetbare operatoren, verschilend is van de verzameling van meetbare functies (notatie van de meetbare functies $\mathcal{M}$), kunnen we ons afvragen wat het verband gaat zijn tussen de twee volgende gedefinieerde ruimten:

$$L_1^p = \{f \in \mathcal{M} \,|\, \|f\|_p < +\infty\} \tag{1.11}$$

$$L_2^p = \{f \in \tilde{M} \,|\, \|f\|_p < +\infty\} \tag{1.12}$$

Het is duidelijk dat $L_1^p \subseteq L_2^p$, maar de vraag die we ons stellen is dat er eventueel geen gelijkheid is zodat we verder in de rest van dit werk zonder problemen met de tweede ruimte kunnen verderwerken, dit zal inderdaad zo zijn. Dit resultaat wordt geformuleerd in de volgende stelling:

Stelling 1.66 *Beschouwen we een σ-eindige maatruimte (X, Ω, μ) en noteren we met $\mathcal{M}$ de verzameling van alle meetbare functies op X dan zal een meetbare functie f waarvoor $\|f\|_p < +\infty$,als vermenigvuldigingsoperator op $L^2(X, \mu)$ ook τ-meetbaar zijn.*

Bewijs:
We merken hier eerst op dat we f in feite als een vermenigvuldigingsoperator moeten behandelen , we gaan echter telkens die identificatie maken, zonder dat expliciet aan te geven in de notatie, dit om een overvloed aan notatie te vermijden.

We tonen aan dat voor $f \in M_n(\mathbb{C})$ met $\|f\|_p < +\infty$ er een rij functies $(f_n)_n$ bestaat die in maat naar f convergeert want dan zal $f \in \tilde{M}$.

Kies hier $\epsilon > 0$, stel $f_n = f\chi_{\Delta_n}$ met $\Delta_n = \{x \,|\, |f(x)| \leq n\}$ Dan zal $f_n \nearrow f$ en $f_n \in L^\infty(X, \mu)$ want $|f(x)| \leq n$. Dan zal $A_n^\epsilon = \{x \,|\, |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}$ een dalende rij in n vormen d.w.z.

$$\ldots \supseteq A_n^\epsilon \supseteq A_{n+1}^\epsilon \supseteq \ldots$$

en omdat nu $\sup_n f_n = f$ zal dus $\cap_n A_n^\epsilon = \emptyset$. Wanneer er nu een $N \in \mathbb{N}$ zal bestaan waarvoor dus $\mu(A_N^\epsilon) < +\infty$ en dan verkrijgen we hetvolgende

$$\lim_n \mu(A_n^\epsilon) = \mu(\cap_n A_n^\epsilon) = 0$$

dit mag want neem $p \in [1 + \infty[$ dan verkrijgen we voor een wellekeurige $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu(A_N^\epsilon).\epsilon^p &\leq \int_{A_N^\epsilon} |f - f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \int_{A_N^\epsilon} |f|^p d\mu + \int_{A_n^\epsilon} |f_n|^p d\mu \\ &\leq \|f\|_p^p + \|f\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p < +\infty \end{aligned}$$

Dan zal dus $\mu(A_N^\epsilon) < +\infty$ wat ons dus het gevraagde levert. ■

We kunnen nu dus besluiten dat de twee ruimten die vóór de stelling genoemd werden namelijk L_1^p en L_2^p gelijk zullen zijn, wanneer we verder in dit werk spreken over het klassieke geval zullen we ook enkel en alleen met de τ-meetbare functies werken, omdat dat toch geen verschil maakt in de constructie van de L^p-ruimten.

Hoofdstuk 2

$L^p(M)$ voor een spoor

Vooraleer we overgaan tot de algemene constructie, zoals aangebracht in hoofdstuk 3, gaan we in dit hoofdstuk een eenvoudigere $L^p(M)$-ruimte construeren, namelijk voor een von Neumann-algebra M met een spoor τ. In dit hoofdstuk gebaseerd op de artikels ([25], [24] [22] [21]) gebruiken we niet het klassieke 3-lijnen theorema om de Hölder-ongelijkheid aan te tonen, deze techniek wordt al in het derde hoofdstuk gebruikt, en tweemaal een praktisch volledig analoge opbouw is weinig interessant. Daarom maken we hier gebruik, van een misschien wat vreemde functie, nl. de rearrangement van een operator. Deze rearrangement gaat bijzonder zijn omdat we hier een reële functie gaan verkrijgen, en wel zodanig dat de klassieke L^p-norm op deze functie een verband gaat tonen met de L^p-norm die we op de operatoren gaan definiëren. Zo gaan we dan via deze opbouw de Hölder ongelijkheid kunnen terugvoeren naar de Hölder-ongelijkheid in het klassieke geval.

2.1 Inleidende begrippen

Noteer zoals in het vorig hoofdstuk met M de semi-eindige von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $\mathcal{H}$ en stel τ gelijk aan het semi-eindig, normaal en trouw spoor op M.

2.1.1 Convergentie τ-b.o.

Vooraleer we kunnen overgaan tot de definitie van de $L^1(M)$-ruimte, moeten we een nieuw convergentiebgrip invoeren, nl. de convergentie τ-b.o.

Definitie 2.1 *Een rij τ-meetbare operatoren $(a_n)_n$ op de Hilbertruimte $\mathcal{H}$ convergeert τ-bijna overal naar een τ-meetbare operator a als: $\forall \epsilon > 0, \exists$ een rij projecties $(p_n)_n$ in M zodat $p_n \nearrow 1$ (voor $n \to \infty$), $\|(a_n - a)p_n\| < \epsilon$ en $\tau(1 - p_n) < \infty$*

Opmerkingen:

i. Deze convergentie noteren we kortweg met τ-b.o.

ii. In feite is dit niet de meest algemene vorm van de definitie, omdat convergentie enkel en alleen bepaald wordt door wat de staart doet, definitie (2.1) gaat hier in feite een verzwakte vorm zijn, van de werkelijke definitie:
Een rij meetbare operatoren $(a_n)_n$ op de Hilbertruimte $\mathcal{H}$ convergeert τ-bijna overal naar een meetbare operator a als: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ en een rij projecties $(p_n)_n$ in M zodat $\forall n \geq \mathbb{N}$:

(a) $p_n \nearrow 1$ $(n \to \infty)$,
(b) $\|(a_n - a)p_n\| < \epsilon$ *en*
(c) $\tau(1 - p_n) < \infty$

Meestal gaat echter de zwakkere vorm van de definitie volstaan, we vermelden het dan ook expliciet wanneer de laatst vermeldde vorm gebruikt wordt.

2.1.2 Toepassing op $L^\infty(X, \mu)$.

We werken hier met de maat μ op de verzameling X, die σ-eindig verondersteld wordt. Noteren we dan met Ω de verzameling meetbare delen, en met $\mathcal{M}$ de verzameling meetbare functies op X. Dan weten we uit hoofdstuk 1, dat we $L^\infty(X, \mu)$ als een von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $L^2(X, \mu)$ kunnen beschouwen, het spoor op deze von Neumann-algebra wordt dan gegeven door:

$$\tau(\,.\,) = \int_X .\, d\mu$$

Vooraleer we de convergentie τ-b.o. gaan vergelijken met de gekende convergenties uit het klassieke geval gaan we aantal van die belangrijke convergenties uit de klassieke maattheorie nogmaals opfrissen. Om zo volledig mogelijk te zijn worden hier ook de gekende begrippen, van de uniforme convergentie, puntsgewijze convergentie enz. nogmaals kort herhaald. Zonder het telkens expliciet te gaan vermelden, veronderstellen we dat de rijen van functies en hun limieten meetbaar zijn.

1. **Puntsgewijze convergentie:**
Een rij van functies $(f_n)_n$ convergeert puntsgewijs naar een functie f als:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

Puntsgewijze convergentie b.o.:
Een rij van functies $(f_n)_n$ convergeert puntsgewijs b.o. als er een $E \subseteq X$ bestaat met $\mu(E^c) = 0$ en er puntsgewijze convergentie is voor alle $x \in E$.

2. **Uniforme convergentie:**
Een rij van functies $(f_n)_n$ convergeert uniform naar een functie f als

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$$

uniforme convergentie b.o.:
Een rij van functies $(f_n)_n$ convergeert uniform b.o. naar een functie f als er een $E \subseteq X$ bestaat met $\mu(E^c) = 0$ en er uniforme convergentie is op E.

3. **bijna uniforme convergentie:**
   Een rij $(f_n)_n$ convergeert bijna uniform naar een functie f, als $\forall \epsilon > 0$ er een $F_\epsilon \subseteq X$ bestaat met $\mu(F_\epsilon) < \epsilon$ en er uniforme convergentie is op F_ϵ.

4. **Convergentie in maat:**
   Een rij functies $(f_n)_n$ convergeert in maat naar een functie f, als $\forall \epsilon > 0$ de verzamelingen
   $$A_n^\epsilon = \{x \in X |\ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$
   aan de volgende eis voldoen:
   $$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n^\epsilon) = 0$$

5. **Convergentie voor een $\|\,.\,\|_p$-norm:**
   Een rij van functies $(f_n)_n$ convergeert voor de $\|\,.\,\|_p$-norm naar een functie f, als
   $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \|f_n - f\|_p < \epsilon$$

Vooraleer we de convergentie τ-b.o. gaan vergelijken, eerst nog drie schema's van de onderlinge verhoudingen tussen deze convergenties. (Zie figuur 2.1 en 2.2) (cfr [27, 28]) Voor meer gefundeerde informatie hierover, en als verwijzing naar de bewijzen van deze pijlen kunnen we ook naar deze twee referenties verwijzen ([27, 28]). Vooraleer we

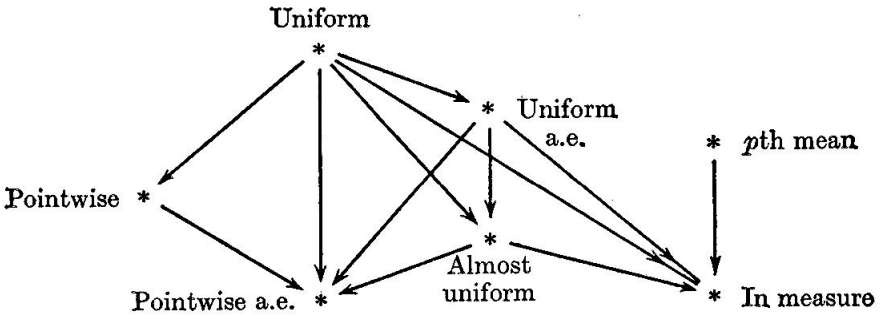


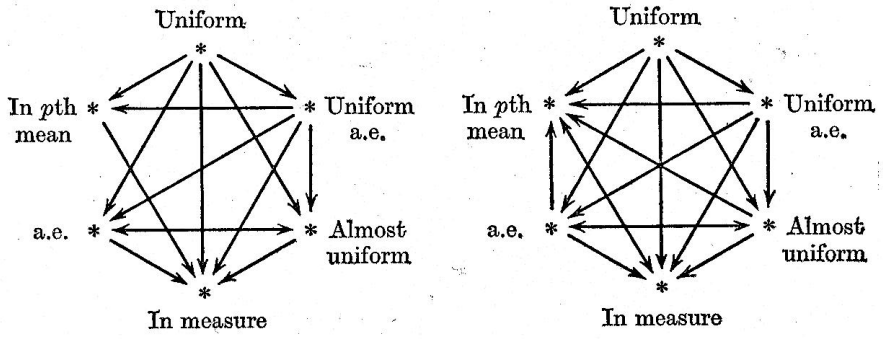
Fig. 2. No additional conditions.

Figuur 2.1: Convergentieverbanden zonder extra eisen

met een vergelijkende studie starten moeten we de convergentie τ-b.o. vertalen naar het klassieke geval. De eis $p_n \nearrow 1$ stemt in het klassieke geval overeen met het feit dat de projecties $\chi_{\Delta_n} \nearrow 1$ waarbij Δ_n meetbare delen zijn. Dat komt erop neer dat $(\Delta_n)_n$ een stijgende keten meetbare delen is. En $\overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n} = X$. We kunnen nu de definitie geven van de convergentie τ-b.o. voor het klassieke geval:

Definitie 2.2 *Stel $(f_n)_n$ als een rij functies uit $\tilde{L}^\infty(X, \mu)$, dan convergeert deze rij τ-b.o. naar een functie $f \in \tilde{L}^\infty(X, \mu)$ als $\forall \epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat en een stijgende rij meetbare delen $(\Delta_n)_n$ zodat $\forall n \geq N$ geldt:*

$$\overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n} = X,$$



Figuur 2.2: convergentieverbanden met extra eisen

$$\|(f_n - f)\chi_{\Delta_n}\|_\infty < \epsilon$$

en

$$\mu(\Delta_n^c) < +\infty.$$

Nu we een concrete definitie van de convergentie τ-b.o. hebben voor het klassieke geval, kunnen we de verschillende klassieke soorten convergentie vergelijken met de convergentie τ-b.o.

1. Een vergelijking met de convergentie in norm $\|\,.\,\|_p$ (voor $p \geq 1$) gaan we hier niet maken, dat gaat verder behandeld worden, wanneer we de $L^1(M)$-ruimte gedefinieerd hebben.

2. De convergentie τ-b.o. impliceert b.o. puntsgewijze convergentie. Eerst en vooral gaan we de verzameling E construeren zodat we op E^c puntsgewijze convergentie zullen hebben en $\mu(E) = 0$.
   $\forall m \in \mathbb{N}, \exists$ een rij borelmeetbare verzamelingen $\Delta_n^m \nearrow 1$ voor $(n \to +\infty)$ zodat $\forall n \geq N$ geldt:
   $$\mu((\Delta_n^m)^c) < +\infty$$
   en
   $$\|(f_n - f)\chi_{\Delta_n^m}\|_\infty < \frac{1}{m}$$
   Stel dan E^m gelijk aan de meetbare verzameling met $\mu(E^m)$=0 zodat
   $$\lim_{n\to\infty} \chi_{\Delta_n^m}(x) = 1 \ \forall x \in E^m$$
   In feite zijn we hier een beetje onnauwkeurig geweest, want met een functie f bedoelen we infeite een klasse van functies die bijna overal gelijk zijn aan elkaar. Puntsgewijze convergentie bijna overal, stemt dan in feite overeen met de puntsgewijze convergentie b.o. van representanten uit deze klassen van functies. We bedoelen dan ook nu in het verder verloop van dit bewijs dat f en f_n representanten uit hun klassen zijn, we gaan ze niet anders noteren om de notatie zo

overzichtig mogelijk te kunnen houden. Omdat we nu dus met specifieke representanten werken, moeten we ook het essentiële supremum beschouwen, d.w.z. er bestaat dus een meetbare F^m zodat $\mu((F^m)^c) = 0$ en

$$\forall x \in F^m : \ |(f_n(x) - f(x))\chi_{\Delta_n^m}(x)| < \frac{1}{m}$$

Stel dan

$$E = \cup_{m\in\mathbb{N}}(E^m \cup F^m)$$

dan zal E als aftelbare unie van verzamelingen met maat nul ook maat nul hebben dus:

$$\mu(E) = 0$$

We krijgen nu puntsgewijze convergentie op E^c want: $\forall x \in E^c$, $\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$, zodat $\forall n \geq N$: $x \in \Delta_n^m$ en dus zal

$$\forall n \geq N : |f(x) - f_n(x)| = |(f(x) - f_n(x))\chi_{\Delta_n^m}(x)| < \frac{1}{m}$$

en bijgevolg verkrijgen we dus puntsgewijze convergentie.

3. Uniforme convergentie impliceert convergentie τ-b.o.
Want $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$:

$$\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$$

Stel dan $\forall n \in \mathbb{N} : \Delta_n = X$ dan zal $\chi_{\Delta_n} \nearrow 1$ en dan is er aan de eisen van de convergentie τ-b.o. voldaan want

$$\mu(\Delta_n^c) = \mu(\emptyset) = 0 < +\infty$$

en

$$\|(f_n - f)\chi_{\Delta_n}\|_\infty < \epsilon$$

4. Uniforme convergentie b.o. impliceert convergentie τ-b.o. Hat aantonen van deze implicatie verloopt praktisch volledig analoog als het voorgaande puntje waarbij we dan hier $\forall n \in \mathbb{N}$ Δ_n gelijk stellen aan de meetbare verzameling E uit de definitie.

5. Convergentie τ-b.o. impliceert onder een aantal voorwaarden convergentie in maat. Deze implicatie gaan we niet aantonen, omdat we weten dat de convergentie τ-b.o. puntsgewijze convergentie b.o. impliceert, kunnen we uit de convergentie schema's afleiden aan welke voorwaarden er voldaan moet zijn om convergentie in maat te verkrijgen. Ook later na de definitie van de $L^1(M)$-ruimte komen we hierop terug.

Ondanks het feit dat er nog verscheiden mogelijkheden na te gaan zijn, gaan we hier stoppen. We kunnen het schema zoals voordien gegeven nu echter al aanvullen met enkele pijlen, zodat we de convergentie τ-b.o. toch al kunnen situeren in het klassieke geval.

2.1.3 Elementaire operatoren

Definitie 2.3 *Een operator e van M wordt voor p als projectie op $\overline{Range(a)}$ geldt: een elementaire operator genoemd als*

$$\tau(p) < +\infty.$$

De verzameling van alle elementaire operatoren zal een tweezijdig ideaal van M vormen (cfr. [22], theorema 10) **voorbeeld**
We gaan opnieuw met de gekende von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ werken. Dan weten we dat X σ-eindig moet zijn, en dat de werking van een element uit $L^\infty(X, \mu)$ op $L^2(X, \mu)$ gegeven wordt door de begrensde functies met vermenigvuldigingsoperatoren op $L^2(X, \mu)$ te gaan identificeren. Vooraleer te beginnen moeten we al wel duidelijk het verschil tussen het spoor τ en de maat μ opmerken, want neem een willekeurige meetbare functie f, dan wordt het verband tussen beiden door de volgende uitdrukking gegeven:

$$\tau(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

Wat wil dit dan in feite zeggen voor de elementaire operatoren: Neem een willekeurige functie f uit $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ dan is

$$Range(f) = \{fg | g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)\}$$

We zoeken nu de projectie op de sluiting van het bereik van f, deze wordt gegeven in hetvolgende lemma:

Lemma 2.4 *Voor $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ wordt de projectie op $\overline{Range(f)}$ gegeven door χ_Δ waarbij*

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}$$

Bewijs:
We beschouwen hier $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ als een verzameling van vermenigvuldigingsoperatoren op $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Omdat nu echter $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ een verzameling van equivalentieklassen is, voor de equivalentie ïs b.o. gelijk aan ", moeten we voorzichtig te werk gaan. We splitsen het bewijs dan ook op in verschillende stappen:

- Is χ_Δ goed gedefinieerd?
  Dat wil zeggen dat we moeten nagaan dat de vermenigvuldigingsoperator geassocieerd aan χ_Δ, onafhankelijk is van de gekozen representant uit de equivalentieklasse van f. Neem twee verschillende representanten f_1, f_2 uit de equivalentieklasse van f en stel dan

  $$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{x \,|\, f_1(x) \neq 0\} \\ \Delta_2 &= \{x \,|\, f_2(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

  Dan is Δ_1 niet noodzakelijk gelijk aan Δ_2, (wel b.o.) we vragen ons echter af dat dan de volgende gelijkheid nog opgaat:

  $$T_{\chi_{\Delta_1}}(L^2(\mathbb{R}, \mu)) = T_{\chi_{\Delta_2}}(L^2(\mathbb{R}, \mu))$$

Dit zal inderdaad zo zijn want neem g als een willekeurige functie uit $L^2(\mathbb{R},\mu)$, en neem g_0 als representant van de equivalentieklasse g, dan zal er gelden dat:

$$\chi_{\Delta_1} g_0 = \chi_{\Delta_2} g_0 \ \ b.o.$$

omdat nu de functies links en rechts van het gelijkheidsteken b.o. gelijk zijn aan elkaar bepalen ze dus dezelfde equivalentieklasse in $L^2(\mathbb{R},\mu)$. χ_{Δ_1} en χ_{Δ_2} bepalen dus dezelfde vermenigvuldigingsoperator.

- $\{fg \,|\, g \in L^2(\mathbb{R},\mu)\} \subseteq \chi_\Delta(L^2(\mathbb{R},\mu))$
  Als we kunnen aantonen dat deze inclusie geldt zal dat automatisch ook impliceren dat $\overline{Range(f)} \subseteq \chi_\Delta(L^2(\mathbb{R},\mu))$ omdat een projectieoperator altijd projecteert op een gesloten deelruimte. Om deze inclusie aan te tonen gaan we opnieuw met representanten werken: neem voor $g \in L^2(\mathbb{R},\mu)$ als representant de functie g_0, voor $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ de functie f_0 en we stellen dan

  $$\Delta_0 = \{x \,|\, f_0(x) \neq 0\}$$

  In het bijzonder zal dan $f_0 g_0$ een representant van fg vormen. We tonen nu aan dat $f_0 g_0$ tot $\chi_{\Delta_0}(L^2(\mathbb{R},\mu))$ zal behoren. Omdat $\chi_{\Delta_0} f_0 g_0 = f_0 g_0$ zal dus $f_0 g_0 \in \chi_{\Delta_0}(L^2(\mathbb{R},\mu))$, bijgevolg zal fg als klasse van functies tot $\chi_\Delta(L^2(\mathbb{R},\mu))$ behoren. Nemen we dab de sluiting dan bekomen we het gevraagde.

- $\chi_\Delta(L^2(\mathbb{R},\mu)) \subseteq \overline{Range(f)}$. Deze inclusie gaat iets lastiger zijn dan de voorgaande. We nemen opnieuw als representant van f, f_0, en we beschouwen de volgende verzamelingen:

  $$\Delta_0 = \{x \,|\, |f(x)| > 0\}$$
  $$\Delta_n = \{x \,|\, |f_0(x)| > 1/n\}$$

  Dan hebben we dat:

  $$\cup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta_0$$

  Neem nu $g \in L^2(\mathbb{R},\mu)$, met representant g_0 dan tonen we aan dat $\chi_{\Delta_0} g_0$ willekeurig dicht door functies uit $Range(f)$ kan benaderd worden, zodat we verkrijgen dat $\chi_\Delta g \in \overline{Range(f)}$. Definieer dan

  $$g_n = \frac{1}{f_0} \chi_{\Delta_n} g_0$$

  Dan zal

  $$\left\| \frac{1}{f_0} \chi_{\Delta_n} \right\|_\infty < n$$

  g_n wordt dus gedomineerd door een kwadratisch integreerbare functie:

  $$g_n \leq n g_0$$

  en bijgevolg zal dus ook $g_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)$. We tonen nu aan dat

  $$f_0 g_n \to \chi_{\Delta_0} g_0$$

  voor de L^2-norm op $L^2(\mathbb{R},\mu)$, dat zal ons dan het gevraagde leveren. Dit laatste tonen we aan m.b.v. de gedomineerde convergentiestelling, we gaan na dat er aan de twee voorwaarden voldaan is:

– $f_0 g_n \to \chi_{\Delta_0} g_0$ puntsgewijs, dat volgt omdat

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta_0$$

– $|f_0 g_n|^2 \leq |g_0|^2$ en $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$

Bijgevolg is er aan de voorwaarden voldaan om de gedomineerde convergentiestelling toe te passen en zal dus

$$\lim_{n\to\infty} \|f_0 g_n - \chi_{\Delta_0} g_0\|_2 = 0$$

En dus zal

$$\chi_{\Delta_0} g_0 \in \overline{Range(f)}$$

■

Een elementaire operator uit $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ is dus een begrensde integreerbare operator, want stel f elementair en noteer met χ_Δ de projectie op $\overline{Range(f)}$ dan zal

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_\Delta f d\mu \leq \|f\|_\infty \int_\Delta d\mu = \|f\|_\infty \mu(\Delta) < +\infty$$

want $\mu(\Delta) < +\infty$ als eis op de elementaire operatoren. **Merk op:**
Dat voor elke elementaire operator $a \in M$ zal gelden dat $\tau(a) < +\infty$, dus $a \in n_\tau$. Dit volgt omdat $a \leq \|a\|_\infty p$, waarbij p de projectie op de sluiting van $Range(a)$ voorstelt, bijgevolg zal toepassing van τ hetvolgende leveren: $\tau(a) \leq \|a\|_\infty \tau(p) < +\infty$.

2.1.4 Kleine notie over de uitbreiding van het spoor τ.

Misschien hadden we al eerder een vermelding moeten maken over de uitbreiding van het spoor τ tot ook niet positieve operatoren, maar vanaf nu wordt het spoor op zoveel verschillende soorten operatoren toegepast dat we ons wel de vraag kunnen stellen dat dat overal evengoed gedefinieerd gaat zijn. Daarom deze kleine paragraaf om latere misverstanden te vermijden. (gebaseerd op [2], I, hfdst 4) Het spoor τ is puur volgens de definitie enkel en alleen gedefinieerd op de positieve elementen. Namelijk voor τ als spoor op de von Neumann-algebra verkrijgen we de volgende definitie

$$\tau : M^+ \to [0, +\infty]$$

Wanneer we nu het spoor τ willen uitbreiden tot ook niet noodzakelijk positieve elementen, zouden we eventueel gewoon lineariteit kunnen toepassen, maar dat levert ons problemen omdat $+\infty - \infty$ niet goed gedefinieerd is, daarom kunnen we deze uitbreiding slechts op een beperkt deel definiëren. We herinneren nogmaals de volgende verzamelingen:

$$\begin{aligned} D_\tau &= \left\{ x \in M^+ \,\middle|\, \tau(x) < +\infty \right\} \\ n_\tau &= \left\{ x \in M \,\middle|\, \tau(x^* x) < +\infty \right\} \\ m_\tau &= n_\tau^* n_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \,\middle|\, x_i, y_i \in n_\tau, n = 1, 2, \dots \right\} \end{aligned}$$

Om het spoor ook op niet positieve elementen goed gedefinieerd te kunnen houden gaan we het spoor wegens lineariteit enkel uitbreiden tot de verzameling m_τ. Dan verkrijgen we uit ([2],hfdst 4) nog hetvolgende resultaat:

$$D_\tau = m_\tau^+ = m_\tau \cap M^+$$

en in het bijzonder gaat elk element van m_τ een lineaire combinatie van elementen uit D_τ zijn. Waarom plaatsen we deze paragraaf, die hier ogenschijnlijk niet thuishoort nu hier, kan u zich afvragen. Dit volgt eenvoudig omdat de elementaire operatoren uit het vorig stuk, perfect in dit kader passen. Want alle elementaire operatoren, hebben per definitie een eindig spoor en bijgevolg, kunnen we het spoor τ op alle linaire combinaties van elementaire operatoren, beschouwen, want dat gaat goed gedefinieerd zijn. Verder gaat er zeer vaak van de lineariteit van het spoor op deze klasse van operatoren gebruik gemaakt worden.

2.2 De definitie van de $L^p(M)$-ruimten

2.2.1 De definitie van $L^1(M)$

Het stuk dat nu volgt gaat in feite een belangrijk stuk vormen, ondanks dat , gaan we nu niet onmiddellijk alles aantonen. Waarom, omdat verder in dit hoofdstuk een meer algemeen kader opgebouwd wordt waarin ook deze $L^1(M)$-ruimte zal passen. Het is een kort uitstel, maar zeker geen afstel van de bewijzen. We geven hier de definitie van de $L^1(M)$-ruimte en de norm erop.

We beginnen met een norm te definiëren op de elementaire operatoren, want deze operatoren gaan de bouwstenen vormen om tot de latere $L^1(M)$ ruimte te kunnen komen.

Definitie 2.5 *Voor $\mathcal{F}$ als verzameling van elementaire operatoren. Definiëren we een norm $\|.\|_1$ op $\mathcal{F}$ als volgt: $\forall e \in \mathcal{F}$*

$$\sup\left\{|\tau(se)| \;\middle|\; s \in M, \|s\| \leq 1\right\} = \|e\|_1$$

Deze definitie is misschien ietwat vreemd, maar hetvolgende lemma maakt ze veel toegankelijker:

Lemma 2.6 *Stel e als een elementaire operator, met polaire decompositie $e = u|e|$, dan zal*

$$\tau(|e|) = \sup\left\{|\tau(se)| \;\middle|\; s \in M, \|s\| \leq 1\right\} = \|e\|_1$$

Bewijs:
We gaan dit aantonen voor $e \geq 0$. De eerste ongelijkheid nl. $\tau(e) \leq \|e\|_1$ volgt puur uit de definitie van $\|e\|_1$. Voor de omgekeerde ongelijkheid moeten we echter gebruik maken van de Cauchy-Scwartz ongelijkheid nl. voor x, y als elementaire operatoren.

$$|\tau(y^*x)|^2 \leq \tau(x^*x)\tau(y^*y).$$

Nemen we $s \in M$ met $\|s\| \leq 1$, en b als een positief, zelftoegevoegde operator, die aan de volgende eis zal voldoen: $b^2 = e$. Dan levert de Cauchy-Schwartz ongelijkheid ons hetvolgende:

$$\begin{aligned} |\tau(se)|^2 &= |\tau(bsb)|^2 \\ &\leq \tau(b^2)\tau(bs^*sb) \\ &= \tau(b^2)\tau(s^*sb^2) \\ &= \tau(e)\tau(s^*se) \end{aligned}$$

Omdat nu $\|s^*s\| \leq \|s^*\| \, \|s\| \leq 1$, krijgen we wanneer, we het supremum over s nemen hetvolgende:

$$\begin{aligned} & \sup\left\{|\tau(se)|^2 \,\middle|\, s \in M, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ \leq \quad & \tau(e) \sup\left\{|\tau(s^*se)| \,\middle|\, \|s\| \leq 1\right\} \\ \leq \quad & \tau(e) \sup\left\{|\tau(ue)| \,\middle|\, \|u\| \leq 1\right\} \end{aligned}$$

Dat levert ons dan de ongelijkheid

$$\|e\|_1^2 \leq \tau(e)\|e\|_1$$

■

Merk op:

- Dat deze afbeelding $\|\,.\,\|_1$ wel degelijk een norm gaat definiëren op de verzameling van elementaire operatoren. Dat kunnen we gebruikamkend van lemma 2.5 eenvoudig afleiden.
- We hebben in het vorige bewijs ondersteld dat er zo'n positief zelftoegevoegde operator b gaat bestaan waarvoor $b^2 = e$. Dit volgt omdat M gesloten is voor de supremumnorm, en het feit dat er een veeltermreeks in e bestaat die uniform naar b zal convergeren. (cfr. [4] en [22]).

Vooraleer we nu tot de definitie van de $L^1(M)$-ruimte komen, moeten we het spoor τ nog uitbreiden, tot een grotere verzameling van operatoren, want ook in de maattheorie is niet elke integreerbare operator begrensd, bijgevolg is er dus wel degelijk nood aan een goed gedefinieerde uitbreiding van het spoor, naar ook onbegrensde operatoren toe.

Definitie 2.7 *Een meetbare operator wordt integreerbaar genoemd als hij τ-b.o. de limiet is van een Cauchy rij elementaire operatoren $(a_n)_n$. Voor een integreerbare operator a definiëren we het spoor als volgt:*

$$\tau(a) = \lim_{n \to +\infty} \tau(a_n)$$

Eerst moeten we nog wel opmerken wat we met een Cauchy rij van elementaire operatoren, bedoelen, dat zal een cauchy rij voor het spoor moeten vormen. Dit betekent in feite hetvolgende, beschouw $(e_n)_n$ als een positieve rij van elementaire operatoren,

dan zal deze rij Cauchy zijn, als $\forall \epsilon > 0$ er een N in $\mathbb{N}$ bestaat, zodanig dat $\forall n, m \geq N$ geldt dat

$$\tau(|e_n - e_m|) < \epsilon$$

Nu zijn er echter twee zeer belangrijke aandachtspunten bij deze uitbreiding:

- Is deze definitie wel goed gedefinieerd, dat wil zeggen, dat het spoor τ op zo'n integreerbare operator nooit de waarde $+\infty$ mag aannemen, we verwijzen hierbij naar paragraaf 2.1.4, waar deze problematiek al uit de doeken gedaan werd.
- Het tweede punt dat onze aandacht verdient, is de limiet wel uniek, dat wil zeggen onafhankelijk van de gekozen rij van elementaire operatoren, die τ-b.o. convergeert.

Het eerste probleem kunnen we oplossen want het bestaan van de limiet volgt uit de volgende afschatting, als $(e_n)_n$ een cauchy rij vormt van positieve elementaire operatoren voor de volgende afbeelding: $\tau(|\,.\,|)$ dan volgt uit de volgende afschatting, dat de limiet wel degelijk gaat bestaan:

$$|\tau(e_n) - \tau(e_m)| \leq \|e_n - e_m\|_1$$

deze laatsten vormen een cauchy rij en bijgevolg ook de eersten, zodat dus de limiet moet bestaan en strikt kleiner dan $+\infty$ zal moeten zijn.

Voor het tweede probleem hebben we echter enkele lemma's nodig

Lemma 2.8 *Stel $(e_n)_n$ als een Cauchy rij van elementaire operatoren die τ-b.o. naar nul zal convergeren, dan zal ook:*

$$\tau(e_n) \to 0$$

Bewijs:
Merk op dat voor een positieve elementaire operator e de $\|\,.\,\|_1$-norm gaat samenvallen met het het spoor van deze operator, dus $\|e\|_1 = \tau(e)$.

- **Stap 1**
  Zij $\delta > 0$, dan bestaat er een n_1 zodat $\forall n, m \geq n_1$ geldt :

  $$\|e_n - e_m\|_1 < \delta$$

  Neem dan een projectie p uit M, dan zal

  $$\begin{aligned} \tau(e_n) &= \tau(e_n) - \tau(e_n p) + \tau(e_n p) && (2.1)\\ |\tau(e_n)| &\leq |\tau(e_n) - \tau(e_n p)| + |\tau(e_n p)| && (2.2) \end{aligned}$$

  $\forall n \geq n_1$:

  $$\tau(e_n) - \tau(e_n p) = \tau(e_n - e_{n_1}) - \tau((e_n - e_{n_1})p) + \tau(e_{n_1} - e_{n_1} p) \qquad (2.3)$$

  Dan verkrijgen we dus wanneer we de absolute waarde nemen in vergelijking (2.3):

  $$\begin{aligned} |\tau(e_n - e_n p)| &\leq |\tau(e_n - e_{n_1})| + |\tau((e_n - e_{n_1})p)| + |\tau(e_{n_1} - e_{n_1} p)| \\ &\leq \|e_n - e_{n_1}\|_1 + \|(e_n - e_{n_1})p\|_1 + |\tau(e_{n_1} - e_{n_1} p)| \\ &\leq 2\delta + |\tau(e_{n_1}) - \tau(e_{n_1} p)| \end{aligned}$$

Wanneer we alles in vergelijking (2.2) invullen rest er ons enkel nog aan te tonen dat

$$|\tau(e_n p)| \to 0,$$

dat doen we in stap 3. En dat

$$|\tau(e_{n_1} - e_{n_1} p)| = 0,$$

dat doen we in stap 2.

- **Stap 2**
  Omdat we p willekeurig gekozen hadden, kunnen we nu p zodanig kiezen, omdat e_{n_1} elementair is, dat $\tau(p) < +\infty$, en met

  $$e_{n_1}\mathcal{H} \subseteq p\mathcal{H}$$

  Dan zal er automatisch gelden dat

  $$\begin{aligned} \tau(e_{n_1} - e_{n_1} p) &= \tau(e_{n_1}) - \tau(e_{n_1} p) \\ &= \tau(e_{n_1}) - \tau(p e_{n_1}) \\ &= \tau(e_{n_1}) - \tau(e_{n_1}) = 0 \end{aligned}$$

- **Stap 3**
  Rest er ons nog aan te tonen dat

  $$\tau(e_n p) \to 0 \quad n \to +\infty$$

  Nemen we dan een willekeurige projectie $q \in M$, en schrijven dan de volgende vergelijking:

  $$p e_n = p e_n q + p e_{n_1}(1-q) + p(e_n - e_{n_1})(1-q)$$

  Wanneer we nu τ op het linker en rechterlid laten werken, dan rest er ons aan te tonen dat de drie componenten afzonderlijk naar 0 zullen streven.

  (a) $|\tau(p(e_n - e_{n_1})(1-q)| \leq \|e_n - e_{n_1}\| \leq \delta$

  (b) Nu gebruiken we pas het feit van de convergentie τ-b.o. Zij $q_n(\epsilon)$ een rij van projecties in M zodanig dat $q_n(\epsilon) \nearrow 1$ voor $n \to \infty$ met $\tau(1 - q_n(\epsilon)) < +\infty$ en $\|e_n q_n(\epsilon)\| \leq \epsilon$ $(\forall n)$ Neem dan $q = q_m(\epsilon)$ dan zal

  $$|\tau(p e_n q)| \leq \|e_n q\| \, \|p\|_1 \leq \epsilon \|p\|_1$$

  Kies dan ϵ zodanig klein dat er geldt dat

  $$\epsilon \|p\|_1 \leq \delta$$

  (c) Als laatste rest er ons nog één term af te schatten namelijk

  $$\tau(p e_{n_1}(1-q)).$$

  Nu levert de Cauchy-schwartz ongelijkheid ons dat

  $$|\tau((1-q)p e_{n_1})|^2 \leq |\tau(e_{n_1}^* e_{n_1})| \, |\tau(p(1-q)p)|$$

(gebruikmakend van het feit dat $\tau((1-q)p(1-q)) = \tau(p(1-q)p)$.) Omdat nu τ trouw en normaal is verkrijgen we dat

$$\tau(p(1-q_n)p) \to 0$$

voor $n \to \infty$. In het bijzonder bestaat er dus een n_2 in $\mathbb{N}$ zodanig dat $\forall n \geq n_2$ geldt:

$$\tau(p(1-q_n)p) \leq \frac{\delta}{|\tau(e_{n_1}^* e_{n_1})^{1/2}|}$$

Wanneer we dan de oorspronkelijke n groter kiezen dan $max(n_1, n_2)$ verkrijgen we dat

$$|\tau(e_n p)| = |\tau(p e_n)| \leq 3\delta$$

Zo bekomen we dat $\tau(e_n) \to 0$ voor $n \to \infty$, wat we moesten aantonen. ■

Vooraleer we de volgende propositie kunnen aantonen moeten we nog het volgende lemma vermelden, dit lemma gaan we als een onbewezen resultaat laten, omdat hier opnieuw gebruik gemaakt wordt van de dimensie functie, wat op zich een moeilijk en een niet kant en klaar begrip is.

Lemma 2.9 *Zij $(e_n)_n, (f_n)_n$ twee rijen van meetbare operatoren, die τ-b.o. naar de meetbare operatoren e en f convergeren, dan convergeert de rij $(e_n + f_n)_n$ τ-b.o. naar $e + f$.*

Bewijs:
Zoals hoger vermeld gaan we het bewijs niet geven, we kunnen echter wel verwijzen naar ([22]), waar dit lemma als theorema 8 geformuleerd staat. ■

Propositie 2.10 *Stel a als een integreerbare operator en noteer met a_n een Cauchy rij van elementaire operatoren die τ-b.o. naar a convergeert dan is het spoor op a als volgt gedefinieerd:*

$$\tau(a) = \lim_{n \to \infty} \tau(|a_n|)$$

Deze definitie zal onafhankelijk zijn van de gekozen rij van elementaire operatoren.

Bewijs:
De goed gedefinieerdheid wil in feite zeggen dat de norm uniek is, d.w.z. dat voor een integreerbare operator e, deze norm onafhankelijk is van de rij elementaire operatoren, die daar τ-b.o. naartoe zullen convergeren. Stel bijvoorbeeld e als integreerbare operator van (M, τ). En stel $(e_n)_n$ en $(e'_n)_n$ twee verschillende rijen van meetbare operatoren, die τ-b.o. naar e convergeren en Cauchy zijn. Dan zal $(e_n - e'_n)_n$ τ-b.o. naar 0 convergeren. Uit het voorgaande lemma volgt dan dat

$$\tau(e_n) - \tau(e'_n) \to 0$$

■

Nu we deze voorgaande lemma's gezien hebben, zijn de volgende twee definities zeer aannemelijk geworden, en zoals de naam ons al liet vermoeden definiëren we de $L^1(M)$ ruimte als volgt:

Definitie 2.11 *$L^1(M)$ is gelijk aan de verzameling van alle integreerbare operatoren.*

De norm $\|.\|_1$ op $L^1(M)$ verkrijgen we nu uit definitie 2.7, stel namelijk $\|e\|_1 = \tau(|e|)$ voor alle elementaire operatoren e. Voor een willekeurig integreerbare operator a definiëren we dan $\|a\|_1 = \lim_{n\to\infty} \tau(|a_n|)$. Verder identificeren we hier dan ook $\tau(|\,.\,|)$ met $\|.\|_1$. Uit het voorgaande weten we dat dit een goede definitie is.

We weten nu dat dit een goede definitie is, maar vooraleer verder te gaan vermelden we toch nog een analoge definitie (cfr. [22]), we bewijzen hier de equivalentie niet maar verwijzen daarvoor naar een latere paragraaf, namelijk paragraaf 2.5.2. Vooraleer we na gaan dat deze afbeelding een norm op $L^1(M)$ definieert moeten we ons afvragen dat dit wel een vectorruimte vormt, lemma 2.9 levert hierop een bevestigend antwoord.

Definitie 2.12 *Voor een integreerbare operator a geldt dat*

$$\|a\|_1 = \sup\left\{|\tau(as)| \,\middle|\, s \in M,\ \|s\|_\infty \leq 1\right\}$$

Gebruikmalend van deze alternatieve definitie is het dan niet meer zo moeilijk om aan te tonen dat $\|\,.\,\|_1$ een norm definieert op $L^1(M)$:

We hebben namelijk dat $\forall a \in L^1(M)$

$$\|a\|_1 = \sup\left\{|\tau(ab)| \,\middle|\, b \in M,\ \|b\|_\infty \leq 1\right\}$$

We gaan achtereenvolgens de drie punten na waaraan een norm moet voldoen:

- $\|a\|_1 \geq 0$ en $\|a\|_1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$
  De positiviteit van $\|\,.\,\|_1$ is triviaal, rest er ons enkel nog het tweede deel aan te tonen. Stel $\|a\|_1 = 0$ d.w.z. dat voor alle begrensde operatoren $b \in M$ met $\|b\|_\infty \leq 1$ geldt dat $\tau(ab) = 0$. Stel dan $a = u|a|$ als polaire decompositie van a en noteer met
  $$|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$
  de spectrale decompositie van a. Stel dan voor elk interval $N = [\alpha, \beta]$, E_N gelijk aan: $\int_\alpha^\beta dE(\lambda)$ Dan verkrijgen we de volgende gelijkheden:
  $$\begin{aligned} E_N &= \left(\int_\alpha^\beta \lambda^{-1} dE(\lambda)\right)|a| \\ &= \left(\int_\alpha^\beta \lambda^{-1} dE(\lambda)\right)u^*u|a| \\ &= \left(\int_\alpha^\beta \lambda^{-1} dE(\lambda)\right)u^*a \end{aligned}$$
  in het bijzonder zal ook het spoor van deze laatste 0 moeten zijn en bijgevolg zal voor elk interval N, $\tau(E_N) = 0$. Alle spectrale projecties zijn nul bijgevolg zal ook a nul moeten zijn, en daaruit volgt het gevraagde.

- $\|\alpha a\|_1 = |\alpha|\|a\|_1$
  Dit volgt uit de alternatieve definitie namelijk

$$\begin{aligned}\|\alpha a\|_1 &= \sup\left\{|\tau(\alpha as)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{|\alpha|\,|\tau(as)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|\,\sup\left\{|\tau(as)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|\|a\|_1\end{aligned}$$

- Enkel de driehoeksongelijkheid rest er ons nog:

$$\begin{aligned}\|a+b\|_1 &= \sup\left\{|\tau((a+b)s)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{|\tau(as)+\tau(bs)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{|\tau(as)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &\quad + \sup\left\{|\tau(bs)| \,\middle|\, s \in M,\, \|s\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \|a\|_1 + \|b\|_1\end{aligned}$$

In feite, om deze paragraaf volledig te maken, zouden we ook nog moeten bewijzen, dat de $L^1(M)$ ruimte voor deze norm volledig gaat zijn, dat wordt later in een meer algemeen kader namelijk voor alle $L^p(M)$ ruimten gelijktijdig aangetoond.

2.2.2 De $L^1(M)$-ruimte in het klassieke geval.

In dit stukje gaan we aantonen. Dat de $L^1(M)$-ruimte zoals we ze hierboven gedefinieerd hebben, overeenstemt met de $L^1(X,\mu)$-ruimte, zoals we die in het klassieke geval gedefinieerd hebben. (cfr. [6]) Merken we nog op dat het spoor τ hier de volgende vorm heeft:

$$\tau(\,.\,) = \int_X .\, d\mu$$

In hoofdstuk 1, hebben we al een vereenvoudiging doorgevoerd in het klassieke geval, namelijk dat we zonder verlies van algemeenheid, gewoon met de verzameling van meetbare operatoren $\tilde{L^\infty}(X,\mu)$, mogen werken in plaats van met de verzameling van meetbare functies $\mathcal{M}$, die veel groter is. Om de duidelijkheid in de volgende redenering te behouden noteren we de norm op $L^1(M)$ met $\|\,.\,\|_1$, de norm op $L^1(X,\mu)$ daarentegen noteren we met $\int_X |\,.\,|d\mu$, merk dan nog op dat deze twee normen op de elementaire operatoren gaan samenvallen, dit wegens de definitie van de norm. Wat we dus in feite moeten aantonen in dit stukje, is tweeledig:

1. Dat voor elke limiet $f \in \tilde{L^\infty}(X,\mu)$ τ-b.o. van een Cauchy rij van elementaire functies $(f_n)_n \in L^\infty(X,\mu)$ geldt dat $\int_X |f|d\mu < +\infty$.

2. Dat elke $f \in \tilde{L^\infty}(X,\mu)$ met $\int_X |f|d\mu < +\infty$ de limiet τ-b.o. van een Cauchy rij van elementaire functies uit $L^\infty(X,\mu)$ is.

Deze twee punten tonen we dan ook apart aan:

1. We tonen eerst het eerste puntje aan, en het tweede zal praktisch volledig analoog verlopen. Stellen we f als de limiet (τ-b.o.) van een Cauchy rij van elementaire operatoren $(f_n)_n$, zonder verlies van elgemeenheid mogen we f positief onderstellen. Dan weten we uit het voorgaande stukje over de definitie van de $\|\,.\,\|_1$-norm, dat de limiet $\tau(|f_n|)$ wel degelijk gaat bestaan en strikt kleiner dan $+\infty$ zal zijn. We moeten nu enkel nog aantonen dat de $\|\,.\,\|_1$-norm wel degelijk overeenstemt met het integreren van deze functie Op de elementaire operatoren, gaan ze per definitie samenvallen, maar de limiet gevallen vergt nog een klein bewijs. Omdat we weten dat de limiet τ-b.o. onafhankelijk gaat zijn van de gekozen rij, gaan we hier een nieuwe rij van stijgende begrensde functies definiëren, die τ-b.o. gaat convergeren naar f, want dan kunnen we de monotone convergentiestelling toepassen, en zo verkrijgen we dan de gelijkheid, maar eerst zullen we deze rij definiëren. Beschouwen we de volgende spectrale decompositie zoals bewezen in lemma 1.62:
$$T_f = \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dF(\lambda)$$
met dan $F(\Delta) = E(f^{-1}(\Delta))$ en $E(\Delta) = T_{\chi_\Delta}$. Definieer dan voor $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^n \lambda dF(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{[0,n]}(\lambda) dF(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{[0,n]}\left(f(\lambda)\right) dE(\lambda) \\ &= f(x) \cdot \chi_{\Delta_n} \end{aligned}$$
Waarbij dan $\Delta_n = \{x \,|\, |f(x)| \leq n\}$. Dan tonen we vervolgens aan dat deze begrensde rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ-b.o. naar f zal convergeren:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ zal f_n een elementaire operator van $L^\infty(X,\mu)$ definiëren, want: $\|f_n(x)\|_\infty \leq n$ en $f_n \leq f \Rightarrow \tau(f_n) \leq \tau(f) = \|f\|_1 < +\infty$, dus zal:
$$\int_X f_n(x) d\mu < +\infty$$
en dus zal f_n elementair zijn.
- nu zou f nog de limiet τ-b.o. van een rij $(f_n)_n$ moeten zijn, we gaan daarvoor de verschillende voorwaarden na:
  (a) $\chi_{\Delta_n} \nearrow 1$
  (b) $\|(f_n - f)\chi_{\Delta_n}\|_\infty = \|f_n\chi_{\Delta_n} - f\chi_{\Delta_n}\|_\infty = 0$
  (c) $\mu(\Delta_n^c) < +\infty$ want
  $$\Delta_n^c = \{x \,|\, |f(x)| > n\}$$
  en dus
  $$\begin{aligned} \mu(\Delta_n^c) \,.\, n &\leq \|\chi_{\Delta_n^c} f\|_1 \\ &\leq \|f\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

Omdat we deze rij nu stijgend geconstrueerd hebben kunnen we besluiten dat de $\|\,.\,\|_1$-norm wel degelijk gaat samenvallen, want gebruikmakend van de gedomineerde convergentiestelling verkrijgen we dat

$$\|f\|_1 = \sup_n \int_X f_n d\mu = \int_X \sup_n f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

In feite werd er ook nog geëist dat deze rij een Cauchy rij van elementaire functies voor de $\|\,.\,\|_1$ norm ging vormen, gebruiken we de gedomineerde convergentiestelling, dan verkrijgen we omdat:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq |f|,$$

$$\sup_n |f_n| = |f|,$$

en omdat $|f|$ integreerbaar is dat

$$\sup_n \|f_n - f\|_1 = 0$$

Hiruit volgt dan dat de rij $(f_n)_n$ ook een cauchy rij vormt want:

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f_m - f\|_1$$

en de laatste twee termen streven naar 0.

2. Om het tweede puntje aan te tonen, moeten we essentieel zo'n rij van elementaire functies gaan construeren die dus τ-b.o. naar de functie f gaan streven. In feite kunnen we deze rij van functies volledig identiek kiezen aan de rij uit het vorige puntje. Wanneer we dan enkel essentiële veranderingen uitvoeren, nl. de norm $\|\,.\,\|_1$ vervangen door $\int_X .\, d\mu$ (bv. om aan te tonen dat de functies wel elementair zijn), kunnen we de gehele gedachtengang, integraal behouden, en bekomen we opnieuw dat zowel de norm als de intgeraal van integreerbare functies gelijk zullen zijn.

Besluit:
Uit deze twee punten kunnen we nu besluiten dat de klassieke $L^1(X,\mu)$-ruimte essentieel gaat samenvallen met de $L^1(M)$-ruimte zoals we ze hier gedefinieerd hebben, we kunnen deze laatste opbouw dus duidelijk als een veralgemening van het klassieke geval beschouwen. In de volgende paragraaf is meteen ook de analogie tussen de klassieke definitie van de $L^p(X,\mu)$-ruimten en de $L^p(M)$-ruimten duidelijk.

2.2.3 De definitie van de $L^p(M)$-ruimten

Nu gaan we expliciet een verzameling definiëren die later onze L^p-ruimte zal blijken te zijn, dit zal dus een essentieel andere techniek zijn dan in het volgende hoofdstuk, daar waar in hoofdstuk drie de L^p-ruimten een deelruimte van een groter geheel zullen zijn, zullen ze hier per p apart geconstrueerd worden.

Definitie 2.13

$$L^p(M) = \{a \in \tilde{M} \,|\, |a|^p \in L^1(M)\}$$

$$\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$$

2.2.4 Het algemene geval

Omdat het met de definitie van de convergentie τ-b.o. en de definitie van de norm niet zo eenvoudig is, om in te zien welke operatoren nu wel en welke niet tot deze verzameling gaan behoren, geven we hier een alternatieve, gelijkwaardige vorm om de $L^1(M)$-ruimte te construeren. We gaan echter niet nagaan dat deze twee definities wel degelijk equivalent zijn, omdat de technieken, om dit aan te tonen reeds vermeld zijn in paragraaf 2.2.2, in essentie komt het bewijs hier neer op het veralgemenen van de begrippen zoals ze in paragraaf 2.2.2 aangebracht werden. We voeren volgende gelijkwaardige definities in voor de norm en de $L^1(M)$-ruimte. Voor de afkomst van deze resultaten verwijzen we naar ([1] Hfdst 1). We breiden eerst het spoor τ uit tot positieve operatoren geaffilieerd aan M.

Definitie 2.14 *Voor een willekeurig positieve operator a geaffilieerd aan M met spectrale resolutie*

$$a = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \, dE(\lambda)$$

stellen we

$$\tau(a) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau \left(\int_0^n \lambda \, dE(\lambda) \right)$$

Omdat het spoor τ nu niet noodzakelijk eindig is op de positieve operatoren a geaffilieerd aan M , moeten we volgende definities voor de L^p-ruimten geven:

Definitie 2.15 *Definieer voor elke $p \in [1, +\infty[$*

$$L^p(M) = \left\{ a \in \tilde{M} \;\middle|\; \tau(|a|^p) < +\infty \right\}$$

en

$$\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$$

Dan verkrijgen we dat $(L^p(M)\,,\, \|\,.\,\|_p)$ een Banachruimte definieert en de verzameling van operatoren gekenmerkt door de eis dat hun spoor eindig moet zijn liggen dicht in $L^p(M)$ voor de p-norm.

Merk op:
Vooraleer we het hoofdresultaat van dit hoofdstuk gaan vermelden, is het misschien toch wel even handig om te wijzen op de verschillen tussen deze definitie en de definitie van $L^1(M)$ zoals we die in paragraaf 2.2.1 geizen hebben. Daar waar we in paragraaf 2.2.1 eerst een verzameling van operatoren gaan definiëren waarop het spoor eindig zal zijn, en bijgevolg dus goed gedefinieerd is, doen we hier in feite het omgekeerde, we breiden eerst het spoor τ uit tot ook niet begrensde operatoren, we hebben nu echter niet de eigenschap dat het spoor τ eindig zal zijn. Daarom moeten we om tot de $L^1(M)$ ruimte te komen, enkel de operatoren nemen die een eindig spoor hebben. Merk ook nog op dat deze laatste definitie in feite zeer sterk aanleunt bij het klassieke geval, en eigenlijk verloopt het bewijs om de equivalentie tussen beide aan te tonen ook volledig analoog.

2.2.5 Hoofdresultaat van dit hoofdstuk

Stapsgewijs gaan we dus de volgende stelling die tevens het hoofdresultaat van dit hoofdstuk is aantonen: Zij M een von Neumann-algebra , waarop τ een semi-eindig, normaal en trouw spoor definieert, definiëren we dan $L^p(M)$ en $\|\,.\,\|_p$ zoals in definitie 2.13, dan verkrijgen we:

i. Als $a, b \in L^p(M)$ dan zal $a + b \in L^p(M)$ en

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

Bijgevolg zal L^p een vectorruimte vormen en definieert $a \mapsto \|a\|_p$ hierop een norm.

ii. De elementaire operatoren liggen dicht in $L^p(M)$ voor de $\|\,.\,\|_p$-norm

iii. $(L^p(M), \|\,.\|_p)$ definieert een Banachruimte.

2.3 De herschikking (rearrangement) van een operator

2.3.1 Enkele nieuwe soorten operatoren

Definitie 2.16 *Een gesloten operator a geaffiloeerd aan M wordt lokaal meetbaar genoemd als er een rij projecties $(p_n)_n$ uit M bestaat zodanig dat $p_n \nearrow 1$ en ap_n meetbaar is, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Voor deze verzameling van operatoren is het onmiddellijk duidelijk dat ze $\tilde{M}$ bevatten (neem voor een element uit $\tilde{M}$ als rij van projecties gewoon de constante rij 1).

Stelling 2.17 *De verzameling van de lokaal meetbare operatoren vormt een *-algebra.*

Bewijs:
Het bewijs van deze stelling wordt aangetoond in ([22]), het maakte echter gebruik van de dimensie functie en een aantal stellingen daaromtrent die een beetje buiten het bestek van deze verhandeling liggen. Omdat we ook nergens essentieel gebruik gaan maken van het feit dat de verzameling van lokaal meetbare operatoren een *-algebra vormt gaan we dit als een onbewezen resultaat beschouwen. ■

Definitie 2.18 *Een operator a op $\mathcal{H}$ wordt enkelvoudig genoemd als hij van de volgende vorm is:*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$$

met $\lambda_i \in \mathbb{C}$ en p_i als een rij elementaire projecties (d.w.z. $\tau(p_i) < +\infty$), met $p_i p_j = 0$ voor $i \neq j$.

Voorbeeld:
Voor we zoeken hoe een enkelvoudige operator er in het geval van de von Neumann-algebra $L^\infty(X, \mu)$ eruitziet, merken we nog op dat de projecties in deze ruimte precies de karakteristieke functies van de meetbare verzamelingen zijn, dus van de volgende vorm χ_E, met E als meetbare verzameling.

- Omdat de projecties uit de ruimte van de elementaire operatoren moeten komen legt dat de volgende eis op de karakteristieke functies:

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\mu < +\infty$$

- Eigenlijk is het heel logisch dat we deze restrictie opleggen, omdat we verder in dit hoofdstuk de integreerbare operatoren met enkelvoudige operatoren willen benaderen. Dus moeten de gebruikte projecties ook integreerbaar zijn en dus een eindige maat hebben.

- De enkelvoudige operatoren zijn dus trapfuncties van de volgende vorm:

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{\Delta_i}$$

  Waarbij $\lambda_i \in \mathbb{C}$ en de Δ_i zijn meetbare verzamelingn met een eindige maat.

- We lopen nu in feite al een beetje vooruit op de feiten, maar merken toch al op, dat voor een enkelvoudige operator a

$$\tau(a) = \tau(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tau(p_i)$$

  en dat stemt overeen met

$$\int_{\mathbb{R}} a d\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Delta_i} d\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(\Delta_i)$$

  wat we kennen uit het klassieke geval.

We herformuleren hier de definitie van de meetbare operatoren:

Definitie 2.19 *Een lokaal meetbare operator a wordt τ-meetbaar genoemd als er een projectie $p \in M$ bestaat met $\tau(p) < +\infty$ en*

$$a(1-p) \in M$$

Bewijs:
We tonen hier kort aan dat deze definitie gelijkwaardig is met de definitie zoals we die in het eerste hoofdstuk vermeld hebben.

- De definitie van het eerste hoofdstuk luidde als volgt:
  Een operator a, geaffilieerd aan M, gesloten en dicht gedefinieerd wordt τ meetbaar genoemd als er een projectie $q \in M$ bestaat zodanig dat

  (a) $q\mathcal{H} \subseteq D(a)$,

  (b) $\tau(1-q) < +\infty$

- We tonen nu aan dat de definitie van hierboven daar equivalent mee is:
  Eerst en vooral is een lokaal meetbare operator a: geaffilieerd aan M, gesloten en dicht gedefinieerd. Definieer dan q als volgt: $q = 1 - p$. Dan is er aan eis (b) voldaan want
  $$\tau(p) = \tau(1 - q) < +\infty.$$
  Omdat nu aq gesloten is levert de stelling van de gesloten grafiek ons dat $aq \in M$ equivalent is met het feit dat aq overal gedefinieerd is, wat de equivalentie tussen $aq \in M$ en puntje (a) aantoont. ■

We behouden de notatie uit hoofdstuk 1, en noteren ook hier de verzameling van τ-meetbare operatoren van M met $\tilde{M}$. En met $\overline{M}$ noteren we de gesloten dicht gedefinieerde operatoren, geaffilieerd aan M.

Definitie 2.20 *Definieer met $\mathcal{C}$ de subalgebra van $\tilde{M}$ als volgt: $a \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \text{ projectie } p \text{ met } \tau(p) < +\infty \text{ zodat } <, <, <, \|a(1-p)\|_\infty < \epsilon$$

Merk op dat de voorwaarden op een operator zoals vermeld in definitie refdef2.9 sterker zijn dan de eisen die op een τ-meetbare operator gelegd worden. We vermelden hier nog kort even de verschillende equivalente karakterizaties van τ-meetbare operatoren.: *Stel $a \in \bar{M}$ met polaire decompositie $a = u|a|$. Dan zijn de volgende karakterizaties equivalent:*

i. a *is τ-meetbaar.*

ii. $|a|$ *is τ-meetbaar*

iii. $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta$

iv. $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \to 0$ *als* $\lambda \to \infty$

v. $\exists \lambda > 0$ *zodat* $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) < \infty$

Voor de subalgebra $\mathcal{C}$ van $\tilde{M}$ verkrijgen we dan volgende karakterizaties, maar eerst nog hetvolgende technische lemma:

Lemma 2.21 *Zij a een gesloten, dicht gedefinieerde operator op $\mathcal{H}$, geaffilieerd aan M, met spectrale decompositie:*

$$|a| = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$

Als e een projectie is zodanig dat $e(\mathcal{H}) \subseteq D(a)$ en $\|ae\| < \lambda$ dan zal $1 - E(\lambda) \lesssim 1 - e$.

Bewijs:
Veronderstel $e \wedge (1 - E(\lambda)) \neq 0$, dan bestaat er een x in $\mathcal{H}$ $(x \neq 0)$ met $x \in e\mathcal{H} \cap (1 - E(\lambda))\mathcal{H}$, dan is x tevens een element van het domein van a en dan zal $E(\mu)(x) = 0$ voor $\mu \leq \lambda$ (Dit volgt omdat $E(\mu) \lesssim E(\lambda)\perp(1 - E(\lambda)$ dus:

$$\|ax\|^2 = \| \, |a|x\|^2 = \int_0^{+\infty} \lambda' dE_{x,x}(\lambda') \geq \lambda^2 \|x\|^2$$

En dit levert een contradictie, want $\|ae\| < \lambda$, bijgevolg moet $e \wedge (1 - E(\lambda)) = 0$ en dus levert vergelijking (1.4) uit hoofdstuk 1 het gevraagde. ■

Propositie 2.22 *Voor a in $\tilde{M}$ met $a = u|a|$ als polaire decompositie van a en als spectrale decompositie*

$$|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

verkrijgen we een equivalentie tussen de volgende twee punten:

i $a \in \mathcal{C}$

ii $\tau(1 - E(\lambda)) < +\infty$ *en dit voor elke* $\lambda > 0$

Bewijs:
a is een element van $\mathcal{C}$ a.s.a. $\forall \epsilon > 0$ er een projectie $p \in M$ bestaat met $\tau(p) < +\infty$ en

$$\|a(1-p)\|_\infty < \epsilon$$

Kies nu $\lambda > 0$ willekeurig, dan bestaat er dus een projectie p zodanig dat

$$\|a(1-p)\|_\infty < \lambda$$

Het voorgaande lemma levert ons dan het resultaat namelijk dat

$$1 - E(\lambda) \leq 1 - (1-p) = p$$

en bijgevolg zal dus

$$\tau(1 - E(\lambda)) \leq \tau(p) < +\infty.$$

Omgekeerd, omdat voor elke $\lambda > 0$ geldt dat

$$\tau(1 - E(\lambda)) < +\infty$$

en dus

$$\|aE(\lambda)\|_\infty \leq \lambda$$

verkrijgen we het gevraagde. ■Vooraleer we concreet gaan nagaan wat deze operatoren in het klassieke geval gaan betekenen worden hier nogmaals de verschillende verbanden tussen de verzamelingen gegeven: We noteren hier de verzameling van elementaire operatoren met $\mathcal{F}$, de verzameling der lokaal meetbare operatoren met $\mathcal{L}$ en dan met $\mathcal{C}$ de operatoren uit definitie 2.20.

- $\mathcal{F} \subseteq L^1(M) \subseteq \tilde{M} \subseteq \mathcal{L}$
- $\mathcal{C} \subseteq \tilde{M} \subseteq \mathcal{L}$
- $M \subseteq \tilde{M} \subseteq \mathcal{L}$

2.3.2 Toepassing op $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$.

In deze sectie gaan we nagaan wat de verschillende operatoren, nu in feite in het klassieke geval gaan betekenen. We werken hier expliciet over $\mathbb{R}^+$ omdat we dan aan de hand van explicite functies de verschillen onmiddellijk kunnen opmerken. In deze sectie, beschouwen we dus de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$, waarbij μ de Lebesguemaat voorstelt, Ω de Borel σ-algebra en $\mathcal{M}$ de verzameling van meetbare functies, het spoor op deze von Neumann-algebra wordt dan gegeven door:

$$\tau(\,.\,) = \int_{\mathbb{R}^+} .\, d\mu$$

We werken hier alleen met meetbare functies $\mathcal{M}$, omdat de operatoren toch geaffilieerd zijn, weten we uit hoofdstuk 1, dat dat geen beperkingen oplevert. We werken, hier ook niet met het uitgebreid positief deel, dat wil zeggen dat de functies slechts op een gebied van maat nul $+\infty$, mogen worden. Vooraleer we verdergaan, moeten we er toch nogmaals de aandacht op vestigen, dat de verzameling van meetbare functies, niet dezelfde is als de verzameling van de meetbare operatoren, er is een essentieel verschil tussen beiden, zoals we in hoofdstuk 1 aangetoond hebben.

1. Welke functies zijn lokaal meetbaar?
   We tonen hier aan dat dit gaat overeenstemmen, met de verzameling van alle meetbare functies $\mathcal{M}$. Neem namelijk, een willekeurige functie $f \in \mathcal{M}$, en stel dan
   $$f_n = f\chi_{\Delta_n}$$
   waarbij
   $$\Delta_n = \{x \,|\, |f(x)| \leq n\}$$
   Dan zal duidelijk
   $$\ldots \subseteq \Delta_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Delta_{n+2} \subseteq \ldots$$
   en bovendien zal dan
   $$\chi_{\Delta_n} \nearrow 1$$
   In het bijzonder zal dan ook $|f_n(x)| \leq n$ en dus zal $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$ bijgevolg is de verzameling van de lokaal meetbare operatoren gelijk aan $\mathcal{M}$.

2. De meetbare operatoren worden gegeven door de sluiting van $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$ voor de convergentie in maat, zoals aangetoond in hoofdstuk 1.

3. $\tilde{M} \subsetneq \mathcal{L}$.
   Want de functie
   $$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x$$
   zal zeker en vast tot de verzameling van de lokaal meetbare operatoren behoren, omdat het een meetbare functie is. Deze functie zal echter geen element van $\tilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$ zijn, omdat er geen rij van begrensde functies bestaat die in maat naar f zal convergeren, want voor een willekeurig begrensde functie g zal
   $$\mu(A_g^\epsilon) = \mu\{x \,|\, |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = +\infty$$

4. $\mathcal{C} \subsetneq \tilde{M}$
   We tonen aan dat de volgende verzamelingen wel degelijk verschillend zijn, m.b.v. hetvolgende voorbeeld: De volgende functie zal wel degelijk meetbaar zijn, maar daarentegen niet tot $\mathcal{C}$ behoren. De functie is begrensd en dus meetbaar, maar er zal echter geen enkele Borelmeetbare verzameling Δ met eindige maat bestaan zodat
   $$\|1 - \chi_\Delta\|_\infty < \epsilon < 1$$

5. $M \subsetneq \tilde{M}$
   Dat gaan we ook concreet aantonen met de volgende functie
   $$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto 1/x$$
   Deze functie zal onbegrensd zijn en dus niet tot M behoren, we kunnen echter wel een Borelmeetbare verzameling Δ vinden met eindige maat zodanig dat
   $$\|f(1 - \chi_\Delta)\|_\infty < \epsilon$$
   Neem namelijk voor Δ het interval $[0, 1/\epsilon]$ dan is $\mu([0, 1/\epsilon]) = 1/\epsilon < +\infty$ en we verkrijgen dat
   $$\|f(1 - \chi_{[0,1/\epsilon]})\|_\infty = \|f\chi_{]1/\epsilon,+\infty[}\|_\infty \leq \epsilon$$

6. $\mathcal{C} \neq M$
   Hier zijn er zelfs geen inclusies, deze twee verzamelingen gaan essentieel verschillend zijn. We nemen daarvoor twee functies die we hierboven reeds behandeld hebben, namelijk de constante functie 1 zal tot M behoren, maar niet tot $\mathcal{C}$. En de functie $1/x$ zal wel tot $\mathcal{C}$ behoren maar niet tot M.

Het geval dat we hier behandeld hebben is specifiek voor $\mathbb{R}^+$ een willekeurige maatruimte (X, Ω, μ) laat zich echter analoog behandelen.

2.3.3 De definitie van een rearrangement

Definitie 2.23 *Voor een operator $a \in \tilde{M}$ met spectrale resolutie van de vorm*
$$|a| = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$
is de herschikking $\tilde{a}$ een reële functie die als volgt gedefinieerd wordt:
$$\tilde{a} :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$$
$$\tilde{a}(\alpha) := \inf \left\{ \lambda \in [0, +\infty[\;\middle|\; \tau(1 - E(\lambda)) \leq \alpha \right\}$$

Het is duidelijk dat $\tilde{a}$ dalend en rechtscontinu is (De rechtscontinuïteit volgt uit de normaliteit van het spoor en de rechtscontinuïteit van $E(\lambda)$. Uit de verschillende karakterizaties van meetbare operatoren volgt dat deze functie goed gedefinieerd is.

Propositie 2.24 *Voor de verzameling $\mathcal{C}$ verkrijgen we dat:*
$$\mathcal{C} = \left\{ a \in \tilde{M} \;\middle|\; \tilde{a}(\alpha) \to 0 \;\; voor \;\; \alpha \to +\infty \right\}$$

BEWIJS:
We tonen de twee inclusies apart aan, en we maken gebruik van de karakterizatie van $\mathcal{C}$ zoals gegeven in propositie 2.22.

- $\mathcal{C} \supseteq \left\{ \mathbf{a} \in \tilde{\mathbf{M}} \,\middle|\, \tilde{\mathbf{a}}(\alpha) \to \mathbf{0} \ \mathbf{voor} \ \alpha \to +\infty \right\}$
  We tonen dit aan uit het ongerijmde, stel a als een element van $\tilde{M}$, zodanig dat dus
  $$\tilde{a}(\alpha) \to 0 \ \textit{voor} \ \alpha \to +\infty$$
  Noteer met
  $$|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$
  de spectrale resolutie van a. Stel nu dat er een bepaalde $\lambda_0 > 0$ bestaat, zodanig dat $\forall \alpha \in [0, +\infty[$
  $$\tau(1 - E(\lambda_0)) > \alpha,$$
  dan zal wegens de stijgendheid van $E(\lambda)$ voor alle $\lambda > \lambda_0$ gelden dat
  $$\tau(1 - E(\lambda)) > \alpha$$
  Bijgevolg zal $\forall \alpha \in [0, +\infty[$ gelden dat
  $$\tilde{a}(\alpha) > \lambda_0$$
  En dat levert een contradictie, bijgevolg moet voor elke $\lambda > 0$ gelden dat
  $$\tau(1 - E(\lambda)) < +\infty$$
  en is er dus aan de karakterizatie (ii) van propositie 2.22 voldaan zodat dus $a \in \mathcal{C}$.
- $\mathcal{C} \subseteq \left\{ \mathbf{a} \in \tilde{\mathbf{M}} \,\middle|\, \tilde{\mathbf{a}}(\alpha) \to \mathbf{0} \ \mathbf{voor} \ \alpha \to +\infty \right\}$
  Ook deze inclusie tonen we uit het ongerijmde aan. Stel $a \in \mathcal{C}$ en veronderstel dat $\tilde{a}(\alpha)$ niet naar 0 streeft voor $\alpha \to \infty$ Omdat $\tilde{a}(\alpha)$ dalend is bestaat er dus een $\lambda > 0$ zodat voor alle $\alpha > 0$ geldt dat $\tilde{a}(\alpha) > \lambda$. In het bijzonder moet dus voor alle $\alpha > 0$ gelden dat $\tau(1 - E(\lambda)) > \alpha$, want als er toch een α_0 groot genoeg zou bestaan, zodanig dat $\tau(1 - E(\lambda)) \leq \alpha_0$ dan zou $\tilde{a}(\alpha_0) \leq \lambda$. We verkrijgen dus opnieuw een contradictie en dus zal $\tilde{a}(\alpha)$ wel naar 0 moeten streven voor $\alpha \to \infty$. ■

Noteren we met $\mathcal{F}$ de verzameling van de elementaire operatoren, dan zal:

Propositie 2.25 *Voor $a \in \tilde{M}$ met*
$$|a| = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$
$$\tilde{a}(\alpha) = \inf \left\{ \|a(1-e)\|_\infty \,\middle|\, e \in \mathcal{F}, \tau(e) \leq \alpha \right\}$$

BEWIJS:

- Om de duidelijkheid in het bewijs te bewaren gaan we de volgende functies in voeren

$$\begin{aligned}\overline{a}(\alpha) &= \inf\left\{\|a(1-e)\|_\infty \,\middle|\, e\in\mathcal{F}, \tau(e)\leq\alpha\right\}\\ \tilde{a}(\alpha) &= \inf\left\{\lambda\in[0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-E(\lambda))\leq\alpha\right\}\end{aligned}$$

  We gaan dan aantonen dat deze twee functies gelijk zijn aan elkaar.

- Omwille van de rechtscontinïteit van $E(\lambda)$ zullen we het infimum in de definitie van $\tilde{a}$ in feite gewoon kunnen vervangen door een minimum. Stel dat $\tilde{a}(\alpha)=\mu$ dan zal

$$\tau(1-E(\mu))\leq\alpha$$

  We gaan nu het bewijs nog opdelen in twee stappen:

- $\overline{\mathbf{a}}(\alpha)\leq\tilde{\mathbf{a}}(\alpha)$
  Om deze ongelijkheid aan te tonen nemen we de projectie uit het vorige puntje namelijk $1-E(\mu)$, dan zal $\tau(1-E(\mu))\leq\alpha$ en $1-E(\mu)\in\mathcal{F}$, Bijgevolg voldoet deze projectie al aan de gevraagde eisen, zoals in de alternatieve definitie. Bovendien krijgen we dan ook :

$$\|aE(\mu)\|_\infty\leq\mu$$

  want voor $\xi\in E(\mu)\mathcal{H}$ zal:

$$\begin{aligned}\|a\xi\|^2 &= \int_0^{+\infty}\lambda^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda)\\ &= \int_0^{\mu}\lambda^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda)\\ &\leq \mu^2\|\xi\|^2\end{aligned}$$

- $\overline{\mathbf{a}}(\alpha)=\tilde{\mathbf{a}}(\alpha)$
  Dit doen we niet door traditioneel aan te tonen dat $\overline{a}(\alpha)\geq\tilde{a}(\alpha)$ maar we tonen aan dat $\overline{a}(\alpha)<\tilde{a}(\alpha)$ tot een contradictie zal leiden. Stel nu dat voor een projectie e uit $\mathcal{F}$ met $\tau(e)\leq\alpha$ geldt dat

$$\|a(1-e)\|_\infty<\mu$$

  dan bestaat er een $\epsilon>0$ zodanig dat

$$\|a(1-e)\|_\infty<\mu-\epsilon<\mu$$

  dan volgt er uit lemma 2.21 dat:

$$1-E(\mu-\epsilon)\lesssim e$$

  en dus zal

$$\tau(1-E(\mu-\epsilon))\leq\tau(e)\leq\alpha$$

  hieruit volgt dat

$$\tilde{a}(\alpha)<\mu$$

  En dit laatste levert een contradictie met de veronderstelling die we in het tweede bolletje gemaakt hebben, namelijk dat $\tilde{a}(\alpha)=\mu$ bijgevolg zullen de twee verschillende definities equivalent zijn. ■

Merk op:
Uit het bewijs valt af te leiden dat we ook in deze tweede definitie van $\tilde{a}(\alpha)$ het infimum mogen vervangen door een minimum, omdat ook $\overline{a}(\alpha)$ voor een zekere elementaire operator zijn waarde expliciet zal aannemen. **Voorbeeld:**
We gaan hier nu expliciet een voorbeeld van een herschikking of een "rearrangement"geven, zodat we een beetje een idee krijgen van wat deze functie nu eigenlijk doet: We gaan hier over de hilbertruimte $L^2([0,1])$ werken in plaats van over $L^2(\mathbb{R}^+)$ omdat de functie waarmee we gaan vermenigvuldigen anders niet tot $\tilde{M}$ zou behoren. We werken hier nog altijd met de lebesguemaat μ. Beschouwen we dan de volgende operator a:

$$a(\xi(t)) := t\xi(t)$$

De spectrale maat voor deze operator wordt gegeven door de karakteristieke functies ($E(\Delta) = T_{\chi_\Delta}$), voor meer info hierover ([5]).

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\alpha) &= \inf\left\{\lambda \in [0,1] \,\middle|\, \mu(1-\chi_{[0,\lambda]}) \leq \alpha\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda \in [0,1] \,\middle|\, \mu(\chi_{[\lambda,1]}) \leq \alpha\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda \in [0,1] \,\middle|\, 1-\lambda \leq \alpha\right\} \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat deze laatste functie dalend en rechtscontinu is bovendien verkrijgen we nog de volgende bijzondere eigenschap die zoals verder zal blijken ook in een meer algemeen kader zal passen, namelijk dat de L^p-norm van de eerste functie gelijk gaat zijn aan de L^p-norm van zijn rearrangement:

$$\|a\|_p = \left(\int_0^1 t^p dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{1/p} = \|\tilde{a}\|_p$$

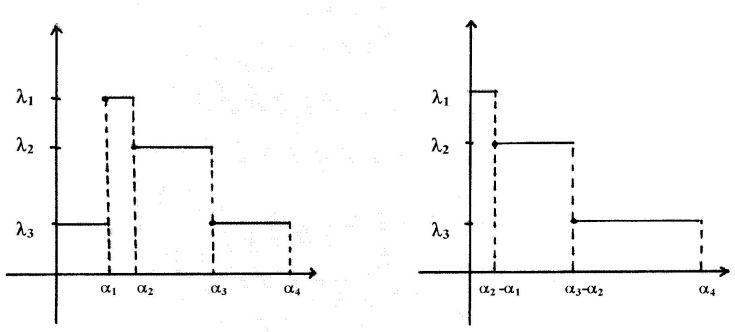
Voorbeeld:
Als laatste voorbeeld geven we hier een grafisch voorbeeld. We werken hier met de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$. Als voorbeeld van een rearrangement, geven we bijgevoegde grafische voorstelling van een trapfunctie links, en rechts de rearrangement van deze trapfunctie. Uit deze twee laatste voorbeelden is het intuïtief duidelijk dat voor reeële functies de rearrangement deze functie gaat omzetten in een dalende rechtscontinue functie die dezelfde norm gaat bepalen.

2.3.4 Eigenschappen van rearrangements

In deze paragraaf gaan we verschillende interessante eigenschappen van rearrangements aantonen, omdat deze ook later gaan terugkomen wanneer we de Hölder en Minkowski-ongelijkheid willen aantonen.

Propositie 2.26 *Voor a als meetbare operator verkrijgen we:*

$$\tilde{a} = \widetilde{|a|} = \widetilde{a^*}$$



Figuur 2.3: De rearrangement van een trapfunctie

Bewijs:
Stel $a = u|a|$ als polaire decompositie van a en

$$|a| = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$

als spectrale decompositie van a. Dan is $a^* = u^*(u|a|u^*)$ en dus: $|a^*| = u|a|u^* = \int_0^{+\infty} \lambda dF(\lambda)$ met $F(\lambda) = uE(\lambda)u^*$. Dit laatste is niet zo heel moeilijk om in te zien, en maakt vooral gebruik van operatorentheorie, we tonen aan dat:

$$u\left(\int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)\right) u^* = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda d(uE(\lambda)u^*)$$

Neem $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ willekeurig, dan geldt er:

$$\begin{aligned}
& < u\left(\int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)\right) u^*\xi, \eta > \\
= & < \left(\int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)\right) u^*\xi, u^*\eta > \\
= & \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \; d < E(\lambda)u^*\xi, u^*\eta > \\
= & \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \; d < uE(\lambda)u^*\xi, \eta > \\
= & < \left(\int_{\mathbb{R}^+} d(uE(\lambda)u^*)\right) \xi, \eta >
\end{aligned}$$

Omdat dit voor $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ willekeurig geldt levert dit de gevraagde gelijkheid. Bijgevolg verkrijgen we dus, omdat τ een spoor vormt:

$$\begin{aligned}
\tau(1 - F(\lambda)) &= \tau(1 - uE(\lambda)u^*) \\
&= \tau(u(1 - E(\lambda))u^*) \\
&= \tau(1 - uE(\lambda)u^*) \\
&= \tau(1 - E(\lambda))
\end{aligned}$$

Bijgevolg zal dan

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\alpha) &= \inf\{\lambda \in [0,+\infty[: \tau(1-E(\lambda)) \leq \alpha\} \\ &= \inf\{\lambda \in [0,+\infty[: \tau(1-F(\lambda)) \leq \alpha\} \\ &= \tilde{a^*}(\alpha)\end{aligned}$$

■

Propositie 2.27 *Voor a als τ-meetbare operator en $x \in M$ verkrijgen we:*

$$\widetilde{(xa)} \leq \|x\|_\infty \tilde{a}$$

Bewijs:
Dit volgt uit de alternatieve definitie voor een herschikking zoals vermeld in propositie 2.25. ■

Propositie 2.28 *Voor a, b als τ-meetbare operatoren, en $\forall \alpha, \beta > 0$:*

$$\widetilde{(a+b)}(\alpha+\beta) \leq \tilde{a}(\alpha) + \tilde{b}(\beta)$$

Bewijs:
Omdat in de twee definities het infimum telkens door een minimum vervangen mag worden verkrijgen we het bestaan twee projecties p en q zodanig dat

$$\|a(1-p)\|_\infty = \tilde{a}(\alpha), \quad \tau(p) \leq \alpha$$

$$\|b(1-q)\|_\infty = \tilde{b}(\beta), \quad \tau(q) \leq \beta$$

Stel dan $r = p \vee q$ dus $1 - r = (1-p) \wedge (1-q)$ Dan geldt er wegens vergelijking (1.2) uit hoofdstuk 1 dat

$$\tau(r) \leq \alpha + \beta$$

en

$$\begin{aligned}\|(a+b)(1-r)\|_\infty &= \|(a+b)((1-p) \wedge (1-q))\|_\infty \\ &\leq \|a((1-p) \wedge (1-q))\|_\infty + \|b((1-p) \wedge (1-q))\|_\infty \\ &\leq \|a(1-p)\|_\infty + \|b(1-q)\|_\infty \\ &= \tilde{a}(\alpha) + \tilde{b}(\beta)\end{aligned}$$

Aangezien we het infimum moeten nemen zal de eerste term van de bovenstaande vergelijking enkel nog kleiner kunnen worden en volgt daaruit het gevraagde.■Vooraleer we de volgende eigenschap van de rearrangement kunnen aantonen, moeten we eerst nog een definitie invoeren en een kort lemma aantonen:

Definitie 2.29 *We noemen een gesloten deelruimte $\Pi \subseteq \mathcal{H}$ geaffilieerd aan M als en slechts als de projectie p op deze deelruimte geaffilieerd aan M is.*

Merk op:

- We merken nog op dat er een 1-1 verband bestaat tussen de gesloten deelruimten van $\mathcal{H}$ en de projectieoperatoren op $\mathcal{H}$. (cfr. [4]en [19])
- Verder in het lemma gaat er ook met de notatie $[A]$ (voor $A \subseteq \mathcal{H}$) gewerkt worden met deze notatie bedoelen we de kleinste gesloten deelruimte die A zal omvatten. Merk hierbij de analogie met de notatie $[\,.\,]$ voor de sluiting van een operator op.

Lemma 2.30 *Beschouwen we de von Neumann-algebra M over de Hilbertruimte $\mathcal{H}$. En noteren we met τ het spoor op M. Voor Π als gesloten deelruimte van $\mathcal{H}$ en voor s als τ-meetbare operator verkrijgen we dan de volgende gelijkheid:*

$$[s^{-1}(\Pi^\perp)] = [s^*(\Pi)]^\perp$$

BEWIJS:
We splitsen het bewijs in twee inclusies op:

- $[\mathbf{s^*(\Pi)}]^\perp \subseteq [\mathbf{s^{-1}(\Pi^\perp)}]$
  Het is voldoende om aan te tonen dat

  $$s^*(\Pi^\perp) \subseteq [s^{-1}(\Pi)]^\perp$$

  want wanneer we daar dan de sluiting van nemen bekomen we het gevraagde. Stel $x \in s^{-1}(\Pi), y \in \Pi^\perp$ dan zal

  $$< s^*y, x >=< y, sx >= 0$$

  want $sx \in \Pi, y \in \Pi^\perp$. dus zal $s^*y \in [s^{-1}(\Pi)]^\perp$.
- $[\mathbf{s^{-1}(\Pi)}]^\perp \subseteq [\mathbf{s^*(\Pi^\perp)}]$
  We tonen deze inclusie aan door de volgende daarmee equivalent inclusie aan te tonen nl.

  $$[s^*(\Pi^\perp)]^\perp \subseteq [s^{-1}(\Pi)]$$

  Omdat nu ook s^{-1} een meetbare operator definieert zal dus $s^{-1}(\mathcal{H})$ τ-dicht liggen in $\mathcal{H}$, bijgevolg zal dus ook $[s^*(\Pi^\perp)]^\perp \cap s^{-1}(\mathcal{H})$ norm dicht zijn in $[s^*(\Pi^\perp)]^\perp$. Dit laatste wordt ons geleverd door gevolg 1.39 uit hoofdstuk 1. In feite volstaat het dus om aan te tonen dat

  $$[s^*(\Pi^\perp)]^\perp \cap s^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq s^{-1}(\Pi)$$

  want de sluiting nemen, levert ons dan opnieuw het gevraagde. We tonen aan dat voor $x \in [s^*(\Pi^\perp)]^\perp \cap s^{-1}(\mathcal{H})$ geldt dat $sx \in \Pi$, dit doen we op zijn beurt door aan te tonen dat $sx \perp \Pi^\perp$. Dit laatste kunnen we nogmaals herleiden tot een eenvoudiger geval, want we weten, omdat $(s^*)^{-1}$ een τ-meetbare operator definieert dat $(s^*)^{-1}(\mathcal{H})$ τ-dicht zal zijn in $\mathcal{H}$. Het zal dus volstaan om aan te tonen dat

  $$sx \perp (\Pi^\perp \cap (s^*)^{-1}(\mathcal{H}))$$

  Stel daarom $y \in (\Pi^\perp \cap (s^*)^{-1}(\mathcal{H}))$ dan zal

  $$< sx, y >=< x, s^*y >= 0$$

  want $x \in [s^*(\Pi^\perp)]^\perp$. En dat levert ons dan de gevraagde inclusie. ■

Merk op: Het is essentieel nodig om met de doorsneden van dichte deelruimten te werken omdat s, s^* en s^{-1}, slechts op een τ-dicht deel gedefinieerd zijn, en niet op gans $\mathcal{H}$.

Lemma 2.31 *Beschouwen we de von Neumann-algebra M over de Hilbertruimte $\mathcal{H}$. En noteren we met τ het spoor op M. Stel Π als een gesloten deelruimte van $\mathcal{H}$, met Π geaffilieerd aan M. Beschouw dan s als een τ meetbare operator en noteer met q de projectie op*

$$[s^{-1}(\Pi)]^\perp = [s^*(\Pi^\perp)]$$

en met p de projectie op

$$\Pi^\perp$$

Dan zal:

$$q \lesssim p$$

Bewijs:Gebruikmakend van het vorige lemma bekomen we dan:

$$[s^{-1}(\Pi)]^\perp = [s^*(\Pi^\perp)] = [s^*p(\mathcal{H})] \sim [ps(\mathcal{H})] \subseteq \Pi^\perp$$

Met $\sim$ bedoelen we dat de projecties op deze twee ruimten, links en rechts van $\sim$ equivalent zijn (cfr. paragraaf 1.3 uit hoofdstuk 1). De bovenstaande vergelijking levert ons dus dat er voor de projecties p en q geldt:

$$q \lesssim q$$

■**Gevolg:** Bij het voorgaande lemma moeten we nog opmerken dat als $q \lesssim p$ dat dan ook $\tau(q) \leq \tau(p)$. (cfr. vergelijking 1.2 uit hoofdstuk 1)

Propositie 2.32 *Voor a, b als meetbare operatore, en $\forall \alpha, \beta > 0$*

$$\widetilde{(ab)}(\alpha + \beta) \leq \tilde{a}(\alpha).\tilde{b}(\beta)$$

Bewijs:
Omdat er toch zoals hoger vermeld een één één verband is tussen gesloten deelruimten van $\mathcal{H}$ en de projectie operatoren gaan we hier tijdelijk om het bewijs met niet te veel notatie te overladen, met $[A]$ de projectie op de kleinste gesloten deelruimte die $A \subseteq \mathcal{H}$ omvat aanduiden. We nemen p en q zodanig dat

$$\|a(1-p)\|_\infty = \tilde{a}(\alpha), \quad \tau(p) \leq \alpha$$

$$\|b(1-q)\|_\infty = \tilde{b}(\beta), \quad \tau(q) \leq \beta$$

Dan definiëren we de projectie operator r als volgt

$$r := q \vee [b^*p(\mathcal{H})]$$

Dan verkrijgen we voor $\tau(r)$:

$$\tau(r) \leq \tau(q) + \tau(p)$$

want lemma 2.31 levert dan hetvolgende:

$$\begin{aligned} \tau(r) &\leq \tau(q) + \tau([b^*p(\mathcal{H})]) \\ &\leq \tau(q) + \tau(p) \leq \alpha + \beta \end{aligned}$$

gebruikmakend van lemma 2.30 verkrijgen we dan:

$$\begin{aligned} 1-r &= (q \vee [b^* p(\mathcal{H})])^{\perp} \\ &= q^{\perp} \wedge [b^* p(\mathcal{H})]^{\perp} \\ &= (1-q) \wedge [b^{-1}(p(\mathcal{H}))^{\perp}] \\ &= (1-q) \wedge [b^{-1}(1-p)\mathcal{H}] \end{aligned}$$

en we verkrijgen nog de volgende laatste afschatting die ons dan het gevraagde levert:

$$\begin{aligned} \|ab(1-r)\|_\infty &= \|ab((1-q) \wedge [b^{-1}(1-p)\mathcal{H}])\|_\infty \\ &= \|a[(1-p)\mathcal{H}]\, b\, ((1-q) \wedge [b^{-1}(1-p)\mathcal{H}])\|_\infty \\ &\leq \|a(1-p)\|_\infty \|b(1-q)\|_\infty \end{aligned}$$

■

Propositie 2.33 *Voor a, b als τ-meetbare operatoren verkrijgen we dat:*

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \tilde{a} \leq \tilde{b}$$

Bewijs:
Deze eigenschap volgt ook uit de alternatieve definitie, zoals gegeven in propositie 2.25.
■

Propositie 2.34 *Voor a τ-meetbaar $a \geq 0$ en $1 \leq p < +\infty$*

$$\widetilde{(a^p)} = (\tilde{a})^p \ \textit{voor} \ \ a \in \tilde{M}$$

Bewijs:
Als

$$a = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$

dan zal

$$\begin{aligned} a^p &= \int_0^{\infty} \lambda^p dE(\lambda) \\ &= \int_0^{+\infty} \mu dF(\mu) \end{aligned}$$

waarbij $F(\mu) = E(\mu^{1/p})$ Dan verkrijgen we hetvolgende:

$$\begin{aligned} \tilde{a^p}(\alpha) &= \inf\left\{\mu \in [0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-F(\mu)) \leq \alpha\right\} \\ &= \inf\left\{\mu \in [0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-E(\mu^{1/p})) \leq \alpha\right\} \\ &= \inf\left\{(\mu^{1/p})^p \in [0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-E(\mu^{1/p})) \leq \alpha\right\} \\ &= \inf\left\{(\lambda)^p \in [0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-E(\lambda)) \leq \alpha\right\} \\ &= \left(\inf\left\{\lambda \in [0,+\infty[\,\middle|\, \tau(1-E(\lambda)) \leq \alpha)\right\}\right)^p \\ &= (\tilde{a}(\alpha))^p \end{aligned}$$

■

Propositie 2.35 $a \in M \Leftrightarrow$

$$a \in \tilde{M} \ \ en \ \ <, \tilde{a}(0^+) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \tilde{a}(\alpha) = \sup_{\alpha > 0} \tilde{a}(\alpha) < +\infty$$

Dan zal bovendien

$$\|a\|_\infty = \tilde{a}(0^+)$$

BEWIJS:
Stel $a = u|a|$ als de polaire decompositie van a en noteer met

$$|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

de spectrale decompositie van a. We splitsen het bewijs op in twee stappen:

- $\Rightarrow$
  omdat $a \in M$ zal a dus begrensd zijn. Dat wil zeggen dat er een $\lambda_0 > 0$ bestaat zodanig dat $\forall \lambda \geq \lambda_0 : E(\lambda) = 1$. In het bijzonder weten we uit de operatoren thorie dat die λ_0 gelijk zal zijn aan $\|a\|_\infty$. Gebruikmakend van de alternatieve definitie van de rearrangement en het feit dat τ trouw is verkrijgen we dan :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(0^+) &= \lim_{\alpha \searrow 0} \inf\{\|a(1-e)\|_\infty \, : \, e \in \mathcal{F}, \tau(e)\} \\ &= \|a\|_\infty \end{aligned}$$

- $\Leftarrow$
  Deze pijl is nagenoeg triviaal, want als $\|a\|_\infty = \tilde{a}(0^+) < +\infty$ zal dus a vast en zeker begrensd zijn. a is nu begrensd en geaffilieerd aan M bijgevolg zal a tot M behoren. ■

De volgende propositie zal ons een alternatieve karakterizatie van elementen uit $L^p(M)$ geven, in termen van de rearrangement. We krijgen hier nog het bijkomende verband tussen de L^p-norm op de operator en de klassieke L^p-norm op de rearrangement.

Propositie 2.36 *Een operator a zal tot $L^p(M)$ behoren als en slechts als aan de volgende twee voorwaarden voldaan is :*

$$a \in \tilde{M} \ \ en \ \ \int_0^{+\infty} (\tilde{a})^p < +\infty$$

Bovendien zal dan ook

$$\|a\|_p = (\int_0^{+\infty} (\tilde{a})^p)^{1/p}$$

BEWIJS:
Wegens propositie 2.32 is het voldoende om dit aan te tonen voor $p = 1$. Stel $a = u|a|$ als de polaire decompositie van a en voor de spectrale decompositie van $|a|$ verkrijgen we hetvolgende:

$$|a| = \int_0^{\infty} \lambda dE(\lambda)$$

Dat levert ons dan:

$$\int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty \tau(1-E(\lambda))d\lambda = \int_0^\infty \lambda d\tau(E(\lambda)) = \tau(|a|)$$

Omdat het bewijs van deze laatste drie gelijkheden nogal zeer technisch is, gaan we enkel intuïtief aangeven, hoe we deze overgangen correct kunnen maken. (cfr. [25])

Voor de allereerste gelijkheid maken we gebruik van de definitie van de rearrangement van de operator a. Uit deze definitie valt af te leiden, dat deze twee functies zo'n beetje als elkaars inverse gezien kunnen worden. Hierbij moeten we wel voorzichtig zijn, omdat ze niet echt elkaars inverse zijn, dit omdat de functies niet noodzakelijk injectief zijn.

Voor de laatste gelijkheid, zouden we eerst nog moeten aantonen dat de integraal $\int_0^{+\infty} \lambda\, d\tau(E(\lambda))$ wel degelijk goed gedefinieerd is. In [22] wordt dit echter mooi uit de doeken gedaan, en zal dit laatste een volwaardig integratiebegrip bijken te definiëren. Eens dat dit integratiebegrip goed ingevoerd is, zal de laatste gelijkheid er uit volgen.

Rest er ons nog een klein woordje te zeggen over de tweede gelijkheid. Om deze stap correct te maken, moeten we $\tau(1-E(\lambda))$ benaderen door trapfuncties, m.b.v. de goede substituties en de correcte convergentiestellingen kunnen we dan gelijkheid aantonen. Vooral deze stap vereist zeer veel techniciteiten. ■

Propositie 2.37 *Voor* $1 \leq p < \infty$

i. *Als* $a \in L^p(M)$ *en* $\|a\|_p = 0$ *dan zal* $a = 0$.

ii. $\|a^*\|_p = \|\,|a|\,\|_p = \|a\|_p$

iii. $\|xa\|_p \leq \|x\|_\infty \|a\|_p \quad a \in L^p(M), x \in M$

iv. $\|a\|_p \leq \|b\|_p \quad a, b \in L^p(M)\ 0 \leq a \leq b$

Bewijs:

1. **(i)**
   We tonen dat aan voor $a \in L^1(M)$ dan volgt de rest. Stel daarom $a \in L^1(M)$, dus integreerbaar, $a \geq 0$ en $\|a\|_1 = 0 = \tau(a)$, we moeten dan aantonen dat $a = 0$. Stel
   $$a = \int \lambda dE(\lambda)$$
   Stel $N = [\alpha, \beta]$ met $(0 < \alpha \leq \beta < +\infty)$ en noteer $E(N) = \int_N dE(\lambda)$ Dan geldt duidelijk: $a \geq \alpha E_n$. Bijgevolg zal$\tau(a) \geq \alpha\, \tau(E(N)$ en dus moet $\tau(E(N)) = 0$. Aangzien de spectrale maat dus overal nul is moet er uit de spectrale decompositie stelling dus ook volgen dat $a = 0$.

2. **(ii), (iii) en (iv)**
   volgen allemaal uit de vorige proposities. Na melijk (ii) volgt uit propositie 2.26, (iii) verkrijgen we gebruikmakend van propositie 2.27 en bij het laatste punt (iv) hebben we propositie 2.33 nodig. ■

2.4 Verschillende soorten van convergentie

In deze sectie definiëren we een aantal verschillende soorten convergenties omdat de verschillen tussen deze convergenties mooi uitgewerkt staan in de volgende artikels ([24],[25] ,[21],[22]), en omdat dit opnieuw een beetje buiten het bestek van deze verhandeling valt, worden hier alleen de definities van de verschillende soorten convergenties gegeven en hun belangrijkste resultaten. We beginnnen met het invoeren van het begrip convergentie in maat.

Definitie 2.38 *De volgende condities zijn equivalent om de convergentie in maat te definiëren:*

i. a_n *convergeert in maat naar* a *(alles in* $\tilde{M}$*)*

ii. $\tau(1 - E_n(\lambda)) \to 0 \quad \forall \lambda > 0$ *met* $|a - a_n| = \int_0^{+\infty} \lambda dE_n(\lambda)$

iii. $(a - a_n)(\alpha) \to 0 \quad \forall \alpha > 0$

Vooraleer we de definitie van convergentie lokaal bijna overal geven, gaan we hier de verzameling van lokaal meetbare operatoren noteren met de letter $\mathcal{L}$, dit om in deze en de volgende definities niet te veel rompslomp aan notatie te verkrijgen

Definitie 2.39 $a_n \in \mathcal{L}$ *convergeert lokaal bijna overal naar* $a \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ *projecties* $E_n \in M, Q_n \in M$ *zodanig dat:* $E_n \nearrow 1, Q_n \nearrow 1, \|(a_n - a)E_n\| < \epsilon$ *en* $\|Q_n(1 - E_n)\|_\infty < +\infty \quad \forall n$

Vooraleer we tot de definitie van de dimensie functie $\mathcal{D}$ komen moeten we nog het volgende opmerken: Wanneer M een von Neumann-algebra over $\mathcal{H}$ definieert met centrum $\mathcal{Z}$. Dan bestaat er een compacte Hausdorffruimte Ω en een reguliere borelmaat μ op Ω (uniek op de equivalentie van maten na) en een *-isomorfisme $\phi : \mathcal{Z} \to L^\infty(\Omega, \mu)$.

Definitie 2.40 *De dimensie functie* $\mathcal{D}$ *wordt gedefinieerd door*

$$\tau(E) = \int_\Omega \mathcal{D}(E) d\mu$$

en dit voor een willekeurige projectie $E \in M$*. Omdat* τ *en* μ *gekend zijn zal dan ook* $\mathcal{D}$ *tot op een factor na uniek bepaald zijn.*

Definitie 2.41

- *Een rij projecties* $(E_n)_n$ *convergeert naar* 0 *lokaal in maat* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}(E_n)$ *convergeert naar nul voor de maat* μ *op elk deel* $K \subseteq \Omega$*, waarvoor* $\mu(K) < +\infty$
- *Dan convergeert een rij* $a_n \in \mathcal{L}$ *naar* $a \in \mathcal{L}$ *lokaal in maat*

  $\Leftrightarrow$

  $(1 - E_n(\lambda)) \to 0$ *lokaal in maat* $\forall \lambda$*, met* $|a_n - a| = \int_0^\infty \lambda dE_n(\lambda)$

  $\Leftrightarrow$

  $\forall \epsilon > 0$ *bestaat er een rij projecties* P_n *zodat* $\|(a_n - a)p_n\| < \epsilon$ *en* $p_n \to 1$ *lokaal in maat.*

De volgende stelling is zeer belangrijk omdat ze de verschillende soorten convergenties vergelijkt en aanduidt welke convergentie sterker is dan de andere.

Stelling 2.42 *We hebben nu de volgende soorten convergentie, waartussen de volgende verbanden zijn:*

i. Convergentie τ-bijna overal (2.1)

ii. Convergentie in maat (2.38)

iii. Convergentie lokaal bijna overal (2.39)

iv. Convergentie lokaal in maat (2.41)

- *(i) $\Rightarrow$ (ii) en (iii) en (iv)*
- *(ii) $\Rightarrow$ (iv)*
- *(iii) $\Rightarrow$ (iv)*
- *Een rij die aan (ii) voldoet bezit een deelrij die aan (i) voldoet.*

Bewijs:
Dit is terug te vinden in ([24]) ■

Lemma 2.43 (van Fatou) *Zij $(a_n)_n$ een rij in $L^1(M)$ zodat a_n lokaal in maat naar $a \in \mathcal{L}$ convergeert, en $\sup_n \|a_n\|_1 < +\infty$. Dan zal $a \in L^1(M)$ en $\|a\|_1 \leq \lim_n \|a_n\|_1$.*

Bewijs:
Omdat het bewijs gebruik maakt van belangrijke eigenschappen van de verschillende soorten convergenties, en niet zo eenvoudig te schetsen is, beschouwen we dit als een laatste onbewezen resultaat van deze paragraaf. Het bewijs is terug te vinden in ([25]), en maakt gebruik van ([22, 24]); ■

Als laatste vermelden we nog de volgende convergentie-implicatie:

Lemma 2.44 *Zij $(a_n)_n$ een rij van operatoren in L^p als $a_n \to a$ voor $\|.\|_p$ dan zal ook $a_n \to a$ in maat.*

2.5 De ongelijkheden

Vooral we gaan aanvangen, met de essentie die deze paragraaf ons te bieden, heeft namelijk de Hölder-ongelijkheid, de Minkowski-ongelijkheid en een alternatieve definitie voor de L^p-norm, moeten we toch opmerken dat er bij het gebruik van het spoor τ enige voorzichtigheid nodig is, we verwijzen hierbij nogmaals naar de paragrafen 2.1.3 en 2.1.4.

2.5.1 De Hölder-ongelijkheid

De allereerste ongelijkheid die we gaan aantonen m.b.v rearrangements is de Hölder-ongelijkheid, om deze ongelijkheid aan te tonen gebruiken we een essentieel andere techniek als in hoofdstuk 3, de volgende paragrafen zijn analoog als in hoofdstuk 3. Eerst geven we een alternatieve definitie voor de norm, en aan de hand van deze definitie tonen we dan de Minkowski-ongelijkheid aan.

Propositie 2.45 *Zij* $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i, b = \sum_{j=1}^{l} \mu_j F_j$ *twee enkelvoudige operatoren met* E_i, F_j *projecties met* $\forall i,j\ \tau(E_i) < +\infty$ *en* $\tau(F_j) < +\infty$ *zodat* $E_i E_{i'} = 0$ *voor* $i \neq i'$, $F_j F_{j'} = 0$ *voor* $j \neq j'$ *dan zal:*

$$\tau(ab) \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$$

Bewijs:
We mogen zonder verlies van algemeenheid de volgende veronderstellingen maken:
$0 < \lambda_k < \lambda_{k-1} < \ldots < \lambda_1$
$0 < \mu_l < \mu_{l-1} < \ldots < \mu_1$

- **Stap 1:**
  Eerst en vooral gaan we concreet de functie $\tilde{a}$ berekenen, het geval $\tilde{b}$ verloopt volledig analoog.

  $$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$$

  met spectrale decompositie van a

  $$a = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

  Merk dan al eerst op dat er een sterk verband is tussen de $E(\lambda)$ en de E_i namelijk: $\sum_{r=1}^{i} E_r = E(\lambda_i)$, dit moeten we interpreteren in termen van de spectrale maat en de spectrale resolutie van de eenheid, zoals vermeld in hoofdstuk 1. Omdat nu

  $$\tilde{a}(\alpha) = \inf \left\{ \|a(1-e)\|_\infty \,\middle|\, e \in \mathcal{F}, \tau(e) \leq \alpha \right\}$$

  zal $\tilde{a}$ bij de waarden $\alpha_1 = \tau(1 - E(\lambda_1)), \ldots, \alpha_k = \tau(1 - E(\lambda_k))$ sprongen van hoogte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vertonen. Dan volgt er uit de eisen die op $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gelegd zijn dat $\alpha_k \geq \alpha_{k-1} \geq \ldots \geq \alpha_1$. Laten we dan α van 0 naar $+\infty$ lopen dan komen we eerst de waarde $\alpha_1 = \tau(1 - E(\lambda_1))$ tegen dat levert ons dan $\tilde{a}(\alpha_1) = \lambda_1$ maar ook voor $\alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2$ zal nog $\tilde{a}(\alpha) = \lambda_1$ vervolgens bereiken we dan α_2 en dus krijgen we voor $\alpha_2 \leq \alpha < \alpha_3$ dat $\tilde{a}(\alpha) = \lambda_2$. Zo kunnen we verder blijven gaan. Bijgevolg verkrijgen we dus:

  $$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i[} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \chi_{[0, \alpha_i[}$$

  $$\tilde{b} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j[} = \sum_{j=1}^{l} (\mu_i - \mu_{i+1}) \chi_{[0, \beta_i[}$$

  Waarbij $\alpha_i = \tau(\sum_{r=1}^{i} E_r)$ voor $(i = 1, \ldots, k)$, $\beta_j = \tau(\sum_{s=1}^{j} F_s)$ voor $(j = 1, \ldots, l)$ en met $\alpha_0 = \beta_0 = \lambda_{k+1} = \mu_{l+1} = 0$

- **Stap 2:**
  We tonen nu de gevraagde ongelijkheid aan:

$$\tilde{a}.\tilde{b} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\mu_j - \mu_{j+1})\chi_{[0,\min(\alpha_i,\beta_j)[}$$

$$\int_0^{+\infty} \tilde{a}.\tilde{b} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\mu_j - \mu_{j+1})\min(\alpha_i,\beta_j)$$

  Maar voor $\tau(ab)$ geldt hetvolgende:

$$\begin{aligned}\tau(ab) &= \sum_i\sum_j \lambda_i\mu_j\tau(E_iF_j)\\ &= \sum_i\sum_j(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\mu_j - \mu_{j+1})M_{ij}\end{aligned}$$

  Met

$$\begin{aligned}M_{ij} &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\tau(E_rF_s)\\ &= \tau(\sum_r E_r \sum_s E_s)\\ &\leq min(\alpha_i,\beta_j)\end{aligned}$$

  Dit laatste omdat $\tau(pq) \leq \min(\tau(q),\tau(q))$ voor projecties $P, Q \in \mathcal{F}$ deze laatste ongelijkheid, volgt omdat we de volgende ongelijkheden hebben: $pq \leq p$ en $qp \leq q$ want daaruit krijgen we dan:

$$\begin{aligned}\tau(pq) &\leq \tau(p)\\ \tau(pq) = \tau(qp) &\leq \tau(q)\end{aligned}$$

  en dat levert ons dan de gevraagde ongelijkheid. Uit dit laatste punt volgt dan eenvoudigweg het gevraagde namelijk

$$\tau(ab) \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$$

■

Voorbeeld:
passen we de voorgaande propositie toe op de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}^+,\mu)$ over $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+,\mu)$ dan gaat de herschikking van een gewone trapfunctie, opnieuw een trapfunctie zijn, die hetzelfde oppervlak onder de kromme heeft, maar dalend en rechtscontinu is. cfr tekening 2.3.3. Vervolgens gaan we propositie 2.45 uitbreiden tot de elementaire operatoren, vooraleer we tot die propositie komen hebben we nog een aantal korte technische lemma's nodig: De eisen die in de lemma's op de operatoren gegeven worden zijn veel te strict maar toch voldoende om propositie 2.50 te laten gelden.

Lemma 2.46 *Zij a, b elementaire operatoren, dan zal voor ϕ als normaal, trouw en semi-eindig spoor gelden:*

$$|\phi(ab)| \leq [\phi(|a^*|\,|b|).\phi(|a|\,|b^*|)]^{1/2}$$

BEWIJS:
In feite is dit al een meer specifiek geval, de oorspronkelijke stelling, en het oorspronkelijke sterkere bewijs is volledig terug te vinden in ([26]). Stel $a = u|a|, b = v|b|$ als polaire decomposities van a en b. Dan is

$$\phi(ab) = \phi(u|a|v|b|)$$

Omdat ϕ bovendien een spoor vormt verkrijgen we dat:

$$\phi(|b|^{1/2}u|a|v|b|^{1/2}) = \phi[(|b|^{1/2}u|a|^{1/2})(|b|^{1/2}v^*|a|^{1/2})^*]$$

Cauchy-Schwartz levert ons gebruikmakend van de eigenschappen van paragraaf 1.2.4 de volgende ongelijkheid:

$$\begin{aligned} |\phi(ab)|^2 &\leq \phi[(|b|^{1/2}u|a|^{1/2})(|b|^{1/2}u|a|^{1/2})^* \\ &\quad .\,\phi[(|b|^{1/2}v^*|a|^{1/2})(|b|^{1/2}v^*|a|^{1/2})^*] \\ &= \phi(u|a|u^*|b|)\phi(|a|v|b|v^*) \\ &= \phi(|a^*||b|)\,.\,\phi(|a||b^*|) \end{aligned}$$

■

Lemma 2.47 *Een begrensde positieve operator a, kan voor de operatornorm $\|.\|_\infty$, willekeurig dicht door enkelvoudige operatoren $(a_n)_n$ met $\forall n\, a_n \leq a$ benaderd worden.*

BEWIJS:
Het bewijs is gebaseerd uit een bewijs uit ([5]). Stel $a = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$. Aangezien a begrensd is zal de integraal van de spectrale resolutie van a slechts over een begrensd interval lopen, stel daarom voor $M > 0$ groot genoeg

$$a = \int_0^M \lambda dE(\lambda)$$

In feite zal $M = \|a\|_\infty$ voldoende groot zijn, maar dat speelt weinig rol in het bewijs. Kies dan de volgende partitie $\Delta_k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$ van $[0, M)$ met $k = 1, \ldots, m$ zodanig dat $\frac{m-1}{2^n} < M \leq \frac{m}{2^n}$ en stel

$$a_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{k-1}{2^n} E([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}))$$

Dan zal $\forall n\ a_n \leq a$
Stel dan:

$$\begin{aligned} a = \int_0^M \lambda dE(\lambda) &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} \lambda dE(\lambda) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\Delta_k} \lambda dE(\lambda) \end{aligned}$$

Dat levert ons $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} |<a\xi,\eta> - \sum_{j=1}^{k} \frac{k-1}{2^n} <E(\Delta_j)\xi,\eta>| &= |\sum_j \int_{\Delta_j} (\lambda - \frac{k-1}{2^n}) dE_{\xi,\eta}(\lambda)| \\ &\leq \sum_j \int_{\Delta_j} |\lambda - \frac{k-1}{2^n}| d|E_{\xi,\eta}|(\lambda) \\ &\leq \sum_j \frac{1}{2^n} \int_{\Delta_j} d|E_{\xi,\eta}|(\lambda) \\ &= \frac{1}{2^n} \|E_{\xi,\eta}\| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \|\xi\| \, \|\eta\| \end{aligned}$$

Nemen we dan het supremum over alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ met $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, dan bekomen we dat:

$$\|a_n - a\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$$

en bijgevolg verkrijgen we het gevraagde namelijk $a_n \leq a$ en

$$\|a_n - a\|_\infty \longrightarrow 0$$

■

Lemma 2.48 *Voor a en b als twee positieve elementaire operatoren, en waarbij de projectie op $[a\mathcal{H}] \vee [b\mathcal{H}]$ gegeven wordt door e zal*

$$eabe = ab$$

Bewijs:
Voor het bewijs hebben we weinig essentiële dingen nodig, het is een gewone berekening. Wegens de definitie van e hebben we zeker en vast al de twee volgende gelijkheden:

$$eab = ab \tag{2.4}$$
$$eba = ba \tag{2.5}$$

Nemen we dan de hermitische toevoeging van vergelijking (2.5) dan bekomen we wegens de positiviteit van beide operatoren

$$abe = a^*b^*e^* = a^*b^* = ab \tag{2.6}$$

Samenstelling van de vergelijkingen (2.4) en (2.6) geeft ons dan het gevraagde namelijk

$$eabe = eab = ab$$

■

Lemma 2.49 *Voor een elementaire projectie e uit de von Neumann-algebra M (d.w.z. $\tau(e) < +\infty$) zal gelden dat het spoor τ normcontinu is op eMe.*

BEWIJS:
We tonen aan dat $\tau(e\,.\,e)$ normcontinu is op M, we willen dus aantonen dat voor een rij operatoren a_n uit M die uniform naar $a \in M$ convergeren, dus voor $n \to \infty$ geldt er

$$\|a_n - a\|_\infty \to 0|$$

dat dan ook

$$|\tau(ea_ne) - \tau(eae) \to 0$$

Dit zal inderdaad zo zijn want

$$\begin{aligned} |\tau(ea_ne) - \tau(eae)| &= |\tau(ea_ne - eae)| \\ &= |\tau(e(a_n - a)e)| \\ &\leq \|a_n - a\|_\infty \,.\, \tau(e) \end{aligned}$$

omdat $\tau(e) < +\infty$ levert dat het gevraagde. ■

Propositie 2.50 *i.* $\tau(ab) \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$ *Voor* a *en* b *als positieve elementaire operatoren.*

ii. $\|ab\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$ *Voor* a *en* b *als positieve elementaire operatoren.*

BEWIJS:

i. Uit het vorige lemma volgt dat we a, b willekeurig dicht kunnen benaderen met behulp van enkelvoudige operatoren, zodat:

$$a_n \leq a \;\; en \;\; \|a - a_n\|_\infty \to 0 \;\; voor \;\; n \to \infty$$

$$b_n \leq b \;\; en \;\; \|b - b_n\|_\infty \to 0 \;\; voor \;\; n \to \infty$$

In het bijzonder zal dan ook a_nb_n uniform naar ab convergeren. Dit volgt uit de volgende afschatting:

$$\begin{aligned} \|a_nb_n - ab\|_\infty &\leq \|a_nb_n - ab_n + ab_n - ab\|_\infty \\ &\leq \|a_n - a\|_\infty\|b_n\|_\infty + \|a\|_\infty\|b_n - b\|_\infty \\ &\leq \|a_n - a\|_\infty\|b\|_\infty + \|a\|_\infty\|b_n - b\|_\infty \end{aligned}$$

Dan volgt er uit de eigenschappen van een rearrangement ook dat:

$$\tilde{a}_n \leq \tilde{a}$$

$$\tilde{b}_n \leq \tilde{b}$$

en dat levert ons gebruikmakend van propositie 2.45 en omdat

$$\tilde{a}_n\tilde{b}_n \leq \tilde{a}\tilde{b}_n \leq \tilde{a}\tilde{b}$$

de volgende ongelijkheden

$$\tau(a_nb_n) \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}_n\tilde{b}_n \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$$

Wegens de normaliteit van τ zal dan ook gelden dat gebruikmakend van lemma 2.48, lemma 2.49 en het feit dat $a_n\mathcal{H} \subseteq a\mathcal{H}$ en $b_n\mathcal{H} \subseteq b\mathcal{H}$ dat

$$\tau(ab) = \lim_n \tau(a_nb_n) \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$$

ii. Stel $ab = v|ab|$ als polaire decompositie van ab dan zal ook gelden dat:

$$\begin{aligned} \|ab\|_1 &= \tau(|ab|) \\ &= \tau(v^*ab) \\ &= \tau(abv^*) \end{aligned}$$

Dan verkrijgen we door toepassing van lemma 2.46, propositie 2.26 en propositie 2.37

$$\begin{aligned} (\tau(abv^*))^2 &\leq \tau(a|bv^*|)\,.\,\tau(a|(bv^*)^*|) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}|\widetilde{bv^*}|\,.\,\int_0^{+\infty} \tilde{a}|(\widetilde{bv^*})^*| \\ &\leq (\int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b})^2 \end{aligned}$$

■

Hetvolgende lemma geeft aan dat elke meetbare operator geschreven kan worden als de som van een begrensde operator en een operator uit $\mathcal{C}$. Deze eigenschap gaat later handig blijken omdat we dan voor de meetbare operatoren verschillende gevallen kunnen onderscheiden.

Lemma 2.51 *$\tilde{M} = M + \mathcal{C}$. Dat wil in feite zeggen dat elke τ-meetbare operator a als som van een element a_1 uit de von Neumann-algebra M en een element a_2 uit $\mathcal{C}$ kan geschreven worden.*

Bewijs:
Stel $a \in \tilde{M}\backslash\mathcal{C}$ (Voor $a \in \mathcal{C}$ is dit natuurlijk triviaal). Noteer met $a = u|a|$ de polaire decompositie van a en als spectrale resolutie van $|a|$

$$|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, dE(\lambda)$$

en stel

$$\lambda_0 = \lim_{\alpha \to +\infty} \tilde{a}(\alpha) = \inf\{\lambda | \tau(1 - E(\lambda)) < +\infty\} > 0$$

Definieer dan:

$$\begin{aligned} a_1 &= aE(\lambda_0) + \lambda_0(1 - E(\lambda_0)) \\ a_2 &= (a - \lambda_0 1)(1 - E(\lambda_0)) \end{aligned}$$

Dan volgt hieruit dat $a = a_1 + a_2$ en $\|a_1\|_\infty = \lambda_0$ bijgevolg is $a_1 \in M$ Voor a_2 verkrijgen we dat:

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0) dE(\lambda_0) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda_0 + \lambda) \end{aligned}$$

bijgevolg zal $\tilde{a}_2 = \tilde{a} - \lambda_0$ en dus geldt er dat $\tilde{a}_2(\alpha) \to 0$ voor $\alpha \to +\infty$ en dus is $a_2 \in \mathcal{C}$, wegens propositie 2.22. ■Opnieuw gaan we de vorige propositie uitbreiden, nu tot de τ-meetbare operatoren. Schematisch hebben we dus de volgende weg gevolgd, van enkelvoudige operatoren naar elementaire operatoren, naar τ-meetbare operatoren.

Stelling 2.52 *Zij $a, b \in \tilde{M}$ en stel $\int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b} < +\infty$, dan zal $ab \in L^1(M)$ en $\|ab\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$.*

BEWIJS:
Er geldt dat $ab \in L^1(M)$ als $|a|\,|b^*| \in L^1(M)$ en $\|ab\|_1 = \|\,|a|\,|b^*|\,\|_1$, dit laatste is niet zo moeilijk in te zien, het maakt gebruik van de alternatieve definitie van de L^1-norm en het feit dat τ een spoor definieert want voor $a = u|a|$ en $b = v|b|$ als polaire decompositie van respectievelijk a en b, en s als een operator uit M met $\|s\|_\infty \leq 1$ geldt er

$$\begin{aligned} \tau(su|a||b^*|v) &= \tau(v^*su|a||b^*|) \\ &= \tau(e|a|\,|b^*|) \end{aligned}$$

Waarbij dan $e = v^*su \in M$ en $\|e\|_\infty \leq 1$. Omdat dan nog $\tilde{a} = |\tilde{a}|, \tilde{b} = |\tilde{b}|$, mogen we onderstellen dat zowel a en b positief zijn. Stel daarbij nog:

$$a = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda), b = \int_0^{+\infty} \lambda dF(\lambda)$$

als spectrale decomposities van respectievelijk a en b

- **Stap 1:** Stel $a, b \in \mathcal{C}$, dan zal dus

  $$\tau(1 - E(\lambda)) < +\infty \quad \forall\lambda$$

  $$\tau(1 - F(\lambda)) < +\infty \quad \forall\lambda$$

  Definieer dan de operatoren a_n en b_n als volgt:

  $$a_n = a(E(n) - E(1/n))$$

  $$b_n = b(F(n) - F(1/n))$$

  dan geldt er dat $a_n, b_n \in \mathcal{F}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ en ook dat

  $$\|a_n b_n\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}_n \tilde{b}_n \leq \tilde{a}\tilde{b}$$

  Waarom zijn a_n en b_n positieve elementaire operatoren? Dat volgt omdat a_n begrensd is want $\|a\|_\infty \leq n$ en uit de volgende afschatting: $a_n \leq n\,(1 - E(1/n)$ omdat $a \in \mathcal{C}$ want dat levert ons dat $\tau(1 - E(1/n)) < +\infty$.

  Omdat bovendien $E(n) - E(1/n) \leq E(n+1) - E(1/(n+1))$ is deze rij van projectieoperatoren stijgend, duidelijk zal ook $E(n) - E(1/n) \nearrow 1$, $\|(a_n - a)(E_n - E(1/n))\|_\infty = 0$ en $\tau(1 - (E(n) - E(1/n))) \leq \tau(1 - E(n)) < +\infty$ Dat wil zeggen dat dus $a_n \to a$ en $b_n \to b$ τ-bijna overal. We kunnen dus het lemma van Fatou toepassen, dat levert ons dan hetvolgende:

  $$\|ab\|_1 \leq \underline{\lim}\|a_n b_n\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b}$$

- **Stap 2:** Stel nu $a \in \tilde{M}\backslash\mathcal{C}$. Uit het vorige lemma volgt dan dat we a als som van elementen a_1, a_2 uit respectievelijk M en $\mathcal{C}$ kunnen schrijven. Dan geldt er dat $\int_0^{+\infty} \tilde{a}_2\tilde{b} < +\infty$ en bijgevolg levert stap 1 ons dat $a_2 b \in L^1(M)$ Bijgevolg krijgen we ook dat

$$ab = a_1 b + a_2 b \in L^1(M)$$

en

$$\begin{aligned} \|ab\|_1 &\leq \|a_1\|_\infty \|b\|_1 + \|a_2 b\|_1 \\ &\leq \lambda_0 \int_0^{+\infty} \tilde{b} + \int_0^{+\infty} \tilde{a}_2\tilde{b} \\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda_0 + \tilde{a}_2)\tilde{b} = \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b} \end{aligned}$$

■

Stelling 2.53 ***Hölder-ongelijkheid***
Stel $a \in L^p(M), b \in L^q(M)$ (zodanig dat $1/p + 1/q = 1$ en $p, q > 1$) dan zal

$$ab \in L^1(M) \text{ en } \|ab\|_1 \leq \|a\|_p \,.\, \|b\|_q$$

Bewijs:
Gebruikmakend van de eigenschappen van een rearrangement en de Hölder ongelijkheid voor reële functies verkrijgen we dan:

$$\|ab\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}\tilde{b} \leq (\int_0^{+\infty} \tilde{a}^p)^{1/p} (\int_0^{+\infty} \tilde{b}^q)^{1/q} = \|a\|_p \,.\, \|b\|_q < +\infty$$

■

2.5.2 Alternatieve definitie voor de norm

Zoals aangekondigd gaan we in deze sectie een andere gelijkwaardige definitie voor de norm aantonen. Hierbij moet wel vermeld worden, dat we in het begin van dit hoofdstuk, waar de $L^1(M)$-ruimte geconstrueerd werd, specifiek voor de $L^1(M)$-ruimte deze definitie al aangetoond hebben. Hier gaan we deze definitie dan uitbreiden, tot een willekeurige $L^p(M)$-ruimte.

Lemma 2.54 *Stel $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a$ als lokaal meetbare operator. Als $ab \in L^1(M)$, voor elke elementaire operator b en*

$$\sup \left\{ |\tau(ab)| \,\middle|\, b \in \mathcal{F}, \|b\|_q \leq 1 \right\} = N < +\infty$$

Dan zal $a \in L^p$ en $\|a\|_p \leq N$

Bewijs:
Stel $a = w|a|, |a| = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$ als respectievelijk polaire en spectrale decompositie van a.

- **Stap 1:**
  We tonen aan dat $\tau(1-E(\lambda)) < +\infty \; \forall \lambda$ dan zal $a \in \mathcal{C}$ we doen dit uit het ongerijmde, stel namelijk dat er een λ bestaat waarvoor $\tau(1-E(\lambda)) = +\infty$, kies dan een projectie e met $\tau(e) < +\infty$ zodanig dat $e \leq 1-E(\lambda)$ en $\tau(e) > \lambda^{-p}N^p$ dan zal $eae \geq \lambda e$ en

$$N \geq \frac{\tau(ae)}{\|e\|_q} = \frac{\tau(eae)}{(\tau(e^q))^{1/q}} = \frac{\tau(eae)}{(\tau(e))^{1/q}} \geq \lambda(\tau(e))^{1-\frac{1}{q}} > N$$

  en dat levert dan de contradictie.

- **Stap 2:**
  Omdat $a \in \mathcal{C}$ zal (analoog als in stelling 2.52).

$$|a|^p(E(n)-E(1/n)) \nearrow |a|^p$$

  τ-bijna overal. Omdat $|a|^p(E(n)-E(1/n))$ elementair is, zal per definitie $|a|^p \in L^1(M)$ en dus zal $a \in L^p(M)$.

- **Stap 3:**
  Definieer:

$$b_n = |a|^{p-1}(E(n)-E(1/n))w^* \in \mathcal{F}$$

  Dan zal

$$ab_n = w|a|^p(E(n)-E(1/n))w^*$$

$$\begin{aligned} N \geq \frac{\tau(ab_n)}{\|b_n\|_q} &= \Big(\tau\Big(w|a|^p(E(n)-E(1/n))w^*\Big)\Big)^{1/p} \\ &= \tau\Big(|a|^p(E(n)-E(1/n))\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

  Nemen we dan het supremum over n dan zal

$$\tau(|a|)^p \leq N^p$$

  en dus:

$$\|a\|_p \leq N$$

■

Hevolgende lemma geeft ons de alternatieve definitie.

Lemma 2.55 *Als $a \in L^p$ met $p > 1$ en $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dan zal*

$$\begin{aligned} \|a\|_p &= \sup\Big\{|\tau(ab)| \;\Big|\; b \in L^q(M), \|b\|_q \leq 1\Big\} \\ &= \sup\Big\{\|ab\|_1 \;\Big|\; b \in L^q(M), \|b\|_q \leq 1\Big\} \end{aligned}$$

Bewijs:
$|\tau(ab)| \leq \tau(|ab|) = \|ab\|_1 \leq \|a\|_p\|b\|_q \leq \|a\|_p$. De rest volgt dan uit het vorige lemma. ■

2.5.3 De Minkowski-ongelijkheid

Propositie 2.56 *Voor a en b als operatoren uit $L^p(M)$, zal $a+b \in L^p(M)$ en krijgen we de driehoeksongelijkheid, nl.*

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

Bewijs:
We splitsen het bewijs op in twee aparte delen, in het eerste puntje tonen we aan dat $a+b$ tot $L^p(M)$ zal behoren. In het tweede deel tonen we m.b.v lemma 2.55 de Minkowski-ongelijkheid aan.

- Gebruikmakend van propositie 2.28 en 2.36 verkrijgen we dat $a, b \in L^p(M)$ dus zal $\int_0^{+\infty} \tilde{a}^p < +\infty$ en $\int_0^{+\infty} \tilde{b}^p < +\infty$ en uit:

$$\widetilde{a+b}(\alpha) = \widetilde{a+b}(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}) \leq \tilde{a}(\frac{\alpha}{2}) + \tilde{b}(\frac{\alpha}{2})$$

$$\left(\widetilde{a+b}(\alpha)\right)^p \leq \left(\tilde{a}(\frac{\alpha}{2}) + \tilde{b}(\frac{\alpha}{2})\right)^p \leq \tilde{a}^p(\frac{\alpha}{2}) + \tilde{b}^p(\frac{\alpha}{2})$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\widetilde{a+b}(\alpha)\right)^p \leq \int_0^{+\infty} \tilde{a}^p(\frac{\alpha}{2}) + \int_0^{+\infty} \tilde{b}^p(\frac{\alpha}{2})$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \tilde{a}^p(\alpha) + 2\int_0^{+\infty} \tilde{b}^p(\alpha) < +\infty$$

  volgt dat $a+b \in L^p(M)$.

- Lemma 2.55 levert ons:

$$\begin{aligned}
\|a+b\|_p &= \sup\left\{ |\tau((a+b)c)| \,\middle|\, c \in L^q(M), \|c\|_q \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\tau(ac+bc)| \,\middle|\, c \in L^q(M), \|c\|_q \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup\left\{ |\tau(ac)| + |\tau(bc)| \,\middle|\, c \in L^q(M), \|c\|_q \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup\left\{ |\tau(ac)| \,\middle|\, c \in L^q(M), \|c\|_q \leq 1 \right\} \\
&\quad + \sup\left\{ |\tau(bc)| \,\middle|\, c \in L^q(M), \|c\|_q \leq 1 \right\} \\
&\leq \|a\|_p + \|b\|_p
\end{aligned}$$

■

2.6 Bewijs van het hoofdresultaat

Stelling 2.57 *i. Als $a, b \in L^p(M)$ dan zal $a+b \in L^p(M)$ en*

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

Bijgevolg zal $L^p(M)$ een vectorruimte vormen en definieert $a \mapsto \|a\|_p$ hierop een norm.

ii. De verzameling van de elementaire operatoren is dicht in $L^p(M)$ voor de $\|\,.\,\|_p$-norm.

iii. $(L^p(M), \|\,.\,\|_p)$ definieert een Banachruimte.

BEWIJS:

i. Dit vraagt geen verder bewijs, want de resultaten uit propositie 2.56 leveren ons het gevraagde.

ii. Zij $a \in L^p$ met $a = w|a|$ en $|a| = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$ en stel dan $a_n = w|a|(E(n)-E(1/n))$ dan zal a_n elementair zijn en

$$\|a - a_n\|_p = \tau\left(|a|^p\Big(1 - E(n) + E(1/n)\Big)\right)^{1/p} \to 0$$

iii. Stel a_n als Cauchy rij in $L^p(M)$, dan zal a_n een Cauchy rij vormen voor de convergentie in maat, en bijgevolg heeft a_n een τ-bijna overal convergente deelrij. Stel voor de eenvoud van notatie a_n zelf gelijk aan die convergerende deelrij. Dus a_n convergeert τ-bijna overal naar zeg a. Stel $b \in L^q(M)$, dan zal wegens de Hölder-ongelijkheid:

$$\|a_n b - a_m b\|_1 \leq \|a_n - a\|_p \|b\|_q$$

Bijgevolg is dus $(a_n b)_n$ een Cauchy rij in $L^1(M)$ en omdat $a_n b \to ab$ τ-bijna overal, zal dus ook $ab \in L^1(M)$. Als $\|b\|_q \leq 1$, dan zal

$$|\tau(ab)| = \lim |\tau(a_n b)| \leq \underline{\lim} \|a_n\|_p \|b\|_q$$

Bijgevolg zal dan $a \in L^p(M)$ wegens lemma 2.54 en $\|a\|_p \leq \underline{\lim}\|a_n\|_p$ Uiteindelijk als $b \in L^q(M)$ en $\|b\|_q \leq 1$ dan zal

$$\begin{aligned} |\tau((a_n - a)b)| &= \lim_{m\to+\infty} |\tau((a_n - a_m)b)| \\ &\leq \lim_{m\to+\infty} \|a_n b - a_m b\|_1 \\ &\leq \lim_{m\to+\infty} \|a_n - a_m\|_p \|b\|_q \end{aligned}$$

en dus zal:

$$\begin{aligned} \|a_n - a\|_p &= \sup\{|\tau((a_n - a)b)| : b \in L^q(M), \|b\|_q \leq 1\} \\ &\leq \lim_{m\to+\infty} \|a_n - a_m\|_p \end{aligned}$$

Bijgevolg zal dus ook $a_n \to a$ voor de L^p-norm. ■.

Bij deze laatste stelling gaan we puntje (ii) nog even vergelijken met het klassieke geval. Gebruikmakend van paragraaf 2.1.3 kunnen we dan dit puntje vertalen naar het klassieke geval. In het bijzonder kunnen we dan zeggen dat elke funtie uit $L^p(X, \mu)$, waarbij (X, Ω, μ) een maatruimte definieert, willekeurig dicht voor de $\|\,.\,\|_p$-norm kan benaderd worden door begrensd integreerbare functies.

2.7 Enkele voorbeelden

In deze laatste paragraaf kunnen we nu dus al L^p-ruimten construeren, gebruikmakend van de resultaten uit hoofdstuk 1 en hoofdstuk 2.

2.7.1 De von Neumann-algebra $M_n(\mathbb{C})$

In gans dit hoofdstuk over de rearrangements hebben we geen enkele maal vermelding gemaakt over de matrices, alhoewel ze perfect passen in dit kader. Dat komt omdat er bij de matrices nogal zeer veel vereenvoudigingen kunnen doorgevoerd worden, zoals we zullen zien in dit deel. We moeten eerst nagaan wat een elementaire operator, concreet in het geval van de matrices zal betekenen. Uit definitie 2.3 en het feit dat voor een willekeurige matrix, dus zeker en vast ook voor een projectieoperator $p \in M_n(\mathbb{C})$ geldt dat

$$tr(p) < +\infty$$

volgt er dat elke matrix elementair zal zijn. We weten uit paragraaf 2 dat $L^1(M)$ een deel zal zijn van $\tilde{M}$, bijgevolg verkrijgen we dus dat:

$$M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{F} \subseteq L^1(M) \subseteq \tilde{M} = M_n(\mathbb{C})$$

Dit levert ons dat

$$\Big(L^1(M_n(\mathbb{C})),\, \|\,.\,\|_1\Big) \cong \Big(M_n(\mathbb{C}), tr(|\,.\,|)\Big)$$

en

$$\Big(L^p(M_n(\mathbb{C})), \|\,.\,\|_p\Big) \cong \Big(M_n(\mathbb{C}), tr(|\,.\,|^p)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

2.7.2 De von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ met een spoor

In dit stukje rest er ons nog heel weinig aan te tonen, de belangrijkste resultaten in dit kader zijn al bewezen op het einde van hoofdstuk 1, en in het begin van dit hoofdstuk waar we aantoonden, dat de klassieke L^1 ruimte samenvalt met de hier gedefinieerde L^1-ruimte. Zie hiervoor in hoofdstuk 1 paragraaf 1.10 en hoofdstuk 2 paragraaf 2.2.2. Omdat de L^p-ruimten ($p > 1$) zowel in het klassieke geval (cfr. [6]) als in dit geval (cfr. paragraaf 2.2.3)op volledig identieke wijze gedefinieerd worden nl.

$$L^p(M) = \Big\{ f \in \tilde{L^\infty}(X, \mu) \;\Big|\; |f|^p \in L^1(M) \Big\}$$

rest er ons niets aan te tonen, en kunnen we besluiten dat het klassieke geval ook mooi in dit kader zal passen en dat we dezelfde $L^p(X, \mu)$-ruimte krijgen zoals in het klassieke geval.

2.8 dualiteit

Als laatste paragraaf uit dit hoofdstuk moeten we nog een klein stukje schrijven over de dualiteit. We hebben namelijk uit de klassieke L^p-theorie, de volgende stelling betreffende dualiteit:

Stelling 2.58 *Zij (X, Ω, μ) een σ-eindige maatruimte met $1 \leq p < +\infty$. Zij q dan de toegevoegde exponent van p (d.w.z. $1/p + 1/q = 1$). Dan is de duale van $L^p(X, \mu)$ als Banachruimte isomorf met $L^q(X, \mu)$. Waarbij het isometrisch isomorfisme gegeven wordt door:*

$$\begin{aligned} \Phi : L^q(X,\mu) &\rightarrow L^p(X,\mu)^* : \\ g &\mapsto \Phi_g \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} \Phi_g : L^p(X,\mu) &\rightarrow L^p(X,\mu) \\ f &\mapsto \Phi_g(f) = \int_X gf\, d\mu \end{aligned}$$

Bewijs:
Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in de cursus maattheorie ([6], III, 4, stelling 4.8). ■

We kunnen ons nu de vraag stellen, of er een mogelijke veralgemening van deze stelling in de context van hoofdstuk 2 mogelijk is, dat zal inderdaad zo zijn, en we verkrijgen de volgende stelling:

Stelling 2.59 *Zij $p \in [1, +\infty[$ en zij q de toegevoegde exponent van p (d.w.z. $1/p + 1/q = 1$), dan verkrijgen we*

i. Voor a in $L^q(M)$ zal de functionaal $\Phi_a(\,.\,)$ gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \Phi_a : L^p(M) &\rightarrow L^p(M) \\ b &\rightarrow \Phi_a(b) = \tau(ab) \end{aligned}$$

een begrensde lineaire functionaal op $L^p(M)$ definiëren.

ii. In het bijzonder zal de afbeelding

$$\begin{aligned} \Phi : L^q(M) &\rightarrow L^p(M)^* \\ a &\mapsto \Phi_a(\,.\,) \end{aligned}$$

Een isometrisch isomorfisme van $L^q(M)$ naar de duale ruimte van $L^p(M)$ definiëren.

Bewijs:
Gebruikmakend van het lemma 2.55 verkrijgen we een alternatieve definitie voor de norm. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \|\Phi_a\|_\infty &= \sup\left\{ |\Phi_a(b)| \,\middle|\, b \in L^p(M),\, \|b\|_p \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ |\tau(ab)| \,\middle|\, b \in L^p(M), \|b\|_p \leq 1 \right\} \\ &= \|a\|_q \end{aligned}$$

en bijgevolg zal de afbeelding

$$a \mapsto \Phi_a$$

een isometrie definiëren tussen $L^q(M)$ en een deelruimte van $L^p(M)^*$.

Aantonen dat elke functionaal uit $(L^p(M))^*$ van deze vorm zal zijn is niet triviaal, we verwijzen dan ook naar het artikel (cfr. [24]), waar het bewijs vervolledigd wordt. ■

We zijn nu klaar met de opbouw van de $L^p(M)$-ruimten vertrekkende van een von Neumann-algebra waarop een trouw, normaal en semi-eindig spoor τ ligt, nu zijn we klaar om de meest algemene constructie namelijk voor een semi-eindig, normaal en trouw gewicht aan te vangen.

Hoofdstuk 3

L^p-ruimten geassocieerd aan een von Neumann-algebra .

In dit hoofdstuk gaan we beginnen met de algemene constructie van de L^p-ruimten, voor een von Neumann algebra M en φ als trouw, semi-eindig en normaal gewicht op M.

Voor deze constructie zouden we op twee mogelijk manieren te werk kunnen gaan. Een eerste manier bestaat erin om de L^p-ruimte voor elke p apart te gaan construeren. Anderzijds zouden we ook deze ruimte als deel van een grotere vektorruimte $\tilde{N}$ kunnen zien. Het is deze laatste weg die we in dit hoofdstuk gaan bewandelen. Deze aanpak brengt een aantal belangrijke voordelen met zich mee, bijvoorbeeld dat $(L^p(M), \|.\|_p)$ een banachruimte vormt volgt dan onmiddellijk uit het feit dat $L^p(M)$ een gesloten deel is van de volledige ruimte $\tilde{N}$ waarin hij ingebed zit.

Wanneer we nu een bepaald deel van $\tilde{N}$ als $L^p(M)$ gedefinieerd hebben, moeten we daar natuurlijk nog een norm op gaan definiëren. Opnieuw kunnen we hier twee wegen bewandelen. Een eerste mogelijk weg brengt ons bij de functionaal analyse, waar we $L^p(M)$ als deel van de topologische vectorruimte $\tilde{N}$ kunnen beschouwen. Aan de hand van de spoortopologie op $L^p(M)$ zouden we hier een norm op kunnen definiëren. (zie de cursus functionaalanalyse [9]). Een tweede manier om de norm te construeren volgt uit de constructie van de L^p-ruimte, zo kunnen we op een eenvoudige manier een norm op $L^p(M)$ leggen, dat zal later, verder in het hoofdstuk duidelijk worden. Nu zouden we echter twee verschillende topologieën op $L^p(M)$ kunnen verkrijgen, maar op het einde van hoofdstuk 3 wordt dan aangetoond dat de beide topologieën gelijk zijn. Zo verkrijgen we dus toch een eenduidig gedefinieerde norm op $L^p(M)$, en hebben we de gevraagde banachruimte geconstrueerd.

Vooraleer we met de daadwerkelijke constructie van de L^p-ruimten gaan beginnen, gaan we een aantal begrippen nader toelichten, er wordt over deze begrippen enkel het noodzakelijke vermeld, dat wil dus zeggen net voldoende om verder alles te begrijpen wat er komt, voor meer informatie zal er dan ook verwezen worden naar de literatuur.

3.1 Inleidende begrippen

In deze eerste sectie gaan we vooral begrippen, die voor de eerste maal gaan verschijnen in het derde hoofdstuk, nader toelichten, we gaan hier geen brede basis leggen om deze begrippen te definiëren, we gaan ons enkel en alleen beperken tot het meest noodzakelijke, er zal dan ook vaak verwezen worden naar de literatuur, waar de begrippen, beter gefundeerd opgebouwd worden. Het niet geven van de bewijzen, gaat echter in geen enkel opzicht een belemmering vormen, tot het begrijpen, van de essentie van dit hoofdstuk.

3.1.1 De modulaire automorfisme groep $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_t$

De volgende resultaten zijn mooi uitgewerkt en aangetoond in ([2], I.4.1).

Definitie 3.1 $(\alpha_t)_t$ *Noemt men een σ-zwak continue 1-parameter groep als $\forall t \in \mathbb{R}$ α_t een *-automorfisme op M vormt en de σ-zwak continuïteit wil zeggen dat $\forall x \in M$ de afbeelding*

$$t \mapsto \alpha_t(x)$$

σ-zwak continu is.

Stelling 3.2 *Als ϕ een normaal, trouw en semi-eindig gewicht is op een von Neumann-algebra dan bestaat er σ zwak continue 1-parameter groep $\{\sigma_t^{\phi}\}_t$ zodanig dat*
i.$\phi \circ \sigma_t^{\phi} = \phi \quad op \quad M_+ \ \forall t \in \mathbb{R}$
ii.$\forall x, y \in n_\phi \cap n_{\phi^*}$ bestaat er een begrensde continue functie $F : \{0 \leq Im(z) \leq 1\} \to \mathbb{C}$ analytisch in het inwendige van de strip en die voor elke t voldoet aan:

$$F(t) = \phi(\sigma_t^{\phi}(y)x) \ \text{ en } \ F(t+i) = \phi(x\sigma_t^{\phi}(y))$$

Die $\{\sigma_t^{\phi}\}_t$ wordt dan de modulaire automorfisme groep van ϕ genoemd.

We kunnen die modulaire automorfisme groep zo'n beetje zien als iets dat de niet commutativiteit meet. Volgend lemma is ook bijzonder omdat de gewichten die wij als voorbeelden gebruiken sporen zijn.

Lemma 3.3 *Als τ een normaal, trouw en semi-eindig spoor is op een von Neumann-algebra M is dan zal*

$$\sigma_t^{\tau}(x) = x \ \ \forall x \in M$$

De modulaire automorfisme groep zal dus triviaal zijn.

3.1.2 Voorbeeld van een modulaire automorfisme groep

In dit voorbeeld berekenen we de modulaire automorfisme groep, toegepast op het voorbeeld van de matrices. We werken hier met de von Neumann-algebra $M_n(\mathbb{C})$, over de Hilbertruimte $\mathbb{C}^n$. We gaan hier niet het traditionele spoor $tr(\,.\,)$ beschouwen, omdat dan de automorfismegroep gaat trivialiseren, zoals we weten uit de theorie in

het voorgaande stukje. Daarom werken we hier met een gewicht $\varphi(\,.\,)$ van de volgende vorm:

$$\varphi(\,.\,) = tr(\rho\,.\,)$$

waarbij we dan ρ als positieve matrix onderstellen en $tr(\rho) = 1$.

We vermoeden dat de modulaire automorfismegroep van de volgende vorm gaat zijn:

$$\sigma_t^{\varphi}(\,.\,) = \rho^{it}\,.\,\rho^{-it}$$

We gaan nagaan dat de verschillende voorwaarden, waaraan de modulaire automorfismegroep moet voldoen ook, daadwerkelijk in orde zijn.

- $\varphi(\sigma_t^{\varphi}(a)) = \varphi(a)$?

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_t^{\varphi}(a)) &= tr(\rho\sigma_t^{\varphi}(a))\\ &= tr(\rho\rho^{it}a\rho^{-it})\\ &= tr(\rho^{it+1}a\rho^{-it})\\ &= tr(\rho^{-it}\rho^{it+1}a)\\ &= tr(\rho a) = \varphi(a)\end{aligned}$$

- Om de tweede voorwaarde te controleren definiëren we de functie F voor $x, y \in n_{\varphi} \cap n_{\varphi^*}$ op volgende wijze:

$$F : \{0 \leq Im(z) \leq 1\} \to \mathbb{C}$$

met

$$F(t) = \varphi(\sigma_t^{\varphi}(y)x)$$

Dan verkrijgen we dus uitgewerkt de volgende vorm

$$\begin{aligned}F(t) &= tr(\rho\rho^{it}y\rho^{-it}x)\\ &= tr(\rho^{it+1}y\rho^{-it}x)\end{aligned}$$

In feite moet er nu nagegaan worden dat deze functie continu en analytisch in het inwendige van de strip zal zijn, dat gaan we pas later behandelen, wanneer we de Hölder-ongelijkheid willen aantonen, we kunnen dan ook verwijzen naar de paragraaf 3.6.3.

Er rest ons nog hetvolgende na te gaan, namelijk dat we de volgende gelijkheid bekomen:

$$\begin{aligned}F(t+i) &= \varphi(x\sigma_t(y))\\ &= tr(\rho x\rho^{it}y\rho^{-it})\end{aligned}$$

En dat zal inderdaad zo zijn, want:

$$\begin{aligned}F(t+i) &= tr(\rho^{i(t+i)+1}y\rho^{-i(t+i)}x)\\ &= tr(\rho^{it-1+1}y\rho^{-it+1}x)\\ &= tr(\rho^{it}y\rho^{-it+1}x)\\ &= tr(\rho^{it}y\rho^{-it}\,\rho x)\\ &= tr(\rho x\rho^{it}y\rho^{-it})\\ &= \varphi(x\sigma_t^{\varphi}(y))\end{aligned}$$

Er is dus aan de karakterizaties van een gewicht voldaan en we hebben dus de modulaire automorfismegroep berekend voor dit specifieke gewicht φ_0 op $M_n(\mathbb{C})$.

3.1.3 Het gekruist produkt

Aan de hand van de von Neumann-algebra M die we beschouwen over de Hilbertruimte $(\mathcal{H}, < \ .\ ,\ . \ >)$ met zijn normaal, trouw en semi-eindig gewicht φ_0 verkrijgen we de modulaire automorfisme groep $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_t$. Hiermee kunnen we een nieuwe von Neumann-algebra $N = R(M, \sigma^{\varphi_0})$ opbouwen, het zogenaamde gekruist produkt.

Noteer met $N = R(M, \sigma^{\varphi_0})$ de von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), (\ .\ |\ .\ )$ voortgebracht door de operatoren

$$\begin{cases} \pi(x) & x \in M \\ \lambda(s) & s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Waarbij dan

$$\begin{cases} (\pi(x)\xi)(t) &= \sigma_{-t}^{\varphi_0}(x)\xi(t) & \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), t \in \mathbb{R} \\ (\lambda(s)\xi)(t) &= \xi(t-s) & \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Het inprodukt $(\ .\ |\ .\ )$ op $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ wordt op de volgende manier gedefinieerd, voor $\xi, \eta \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$:

$$(\xi|\eta) = \int_{\mathbb{R}} < \xi(t), \eta(t) > dt$$

Verder in de tekst gaan we M met zijn beeld $\pi(M)$ identificeren.

Hierbij moet wel opgemerkt worden dat deze opbouw hier zeer specifiek gebeurt, meer algemeen wordt er gewerkt met een willekeurig lokaal compact topologische groep $(G, *)$ in plaats van met het specifieke geval $(\mathbb{R}, +)$, (we krijgen dan natuurlijk ook een andere notatie: $(\lambda(s)\xi)(t) = \xi(s^{-1}t)$). Meer info hieromtrent is terug te vinden in ([7],[10], [29]).

3.1.4 Het unitair cocykel theorema

In dit stukje vermelden we het unitair Cocykel theorema en enkele van z'n belangrijke eigenschappen. Dit alles is gebaseerd op de thesis van Roby Roels ([2], I, 1). De bewijzen zijn terug te vinden in de referenties, vermeld in het begin van de stelling.

Abstract gezien gaat dit theorema ons, voor een gegeven von Neumann-algebra M waarop twee trouwe, normale en semi-eindige gewichten liggen, het bestaan van een afbeelding u aantonen, deze u gaat een verband

leggen tussen deze twee gewichten.

Definitie 3.4 *Met $U(M)$ noteren we de verzameling van alle unitaire transformaties uit M.*

Stelling 3.5 Unitair cocykel theorema ([2], hfdst. I Theorema 25)
Als φ, ψ twee normale, trouwe en semi-eindige gewichten zijn op $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dan bestaat er een sterk continue afbeelding naar de unitaire transformaties over M.

$$u : \mathbb{R} \to U(M)$$

$$t \mapsto u_t$$

zodanig dat:

i. $\sigma_t^{\psi}(x) = u_t.\sigma_t^{\phi}(x).u_t^* \quad \forall x \in M, t \in \mathbb{R}$

ii. $u_{t+s} = u_t.\sigma_t^{\phi}(u_s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

Deze laatste u_t gaat men ook zeer vaak op een andere manier noteren: $(D\psi : D\phi)_t$.

Propositie 3.6 ([2] Hfdst 4, Propositie 4)
Zij $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ een von Neumann-algebra met ψ_1, ψ_2, ψ_3 als normale, trouwe en semi-eindige gewichten op M dan verkrijgen we:

i. $(D\psi_1 : D\psi_2)_t = (D\psi_2 : D\psi_1)_t^{-1}$

ii. $(D\psi_3 : D\psi_1)_t = (D\psi_3, D\psi_2)_t.(D\psi_2 : D\psi_1)_t$

Stelling 3.7 ([2], Hfdst 4)
Zij ϕ een normaal, trouw en semi-eindig gewicht op M en zij $u : t \mapsto u_t$ een sterk continue afbeelding van $\mathbb{R}$ in $U(M)$ zodat $u_{s+t} = u_s\sigma_s^{\phi}(u_t)$ voor alle $s, t \in \mathbb{R}$. Dan bestaat er een uniek, normaal, trouw en semi-eindig gewicht ψ op M zodat $(D\psi : D\phi)_t = u_t$.

3.1.5 Lineaire vormen op M

Zij M een von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $\mathcal{H}$, en M bevat $1_{\mathcal{H}}$, beschouw dan de volgende lineaire vorm:

$$\phi : M \to \mathbb{C}$$

ϕ wordt positief genoemd als $\phi(T) \geq 0, \ \forall T \in M^+$, dan is bovendien ook $\phi(T^*) = \overline{\phi(T)}$ en voor elke $T \in M$ krijgen we dan ook dat $\phi(T^*T) \geq 0$. Bovendien krijgen we dan ook de Cauchy-Schwartz ongelijkheid :

$$|\phi(S^*T)| \leq \phi(S^*S)\phi(T^*T), \forall S, T \in M$$

We noemen een positieve ϕ trouw als $\phi(T) = 0$ voor $T \in M^+$ impliceert dat $T = 0$.
Een positieve ϕ wordt normaal genoemd als voor elk stijgend, uniform begrensd net $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ van positieve operatoren in M geldt dat $\phi(\sup_{\alpha \in I} T_\alpha) = \sup_{\alpha \in I} \phi(T_\alpha)$.

Propositie 3.8 ([2], I, 1.2)
Zij M een von Neumann-algebra en ϕ een normale, positieve lineaire vorm op M. Onder alle projecties p in M zo dat $\phi(p) = 0$ is er een projectie q die groter is dan alle andere. Er geldt dat $\phi(qT) = \phi(Tq) = 0 \ \forall T \in M$.

Definitie 3.9 *We noemen de projectie $1 - q$ (met q uit de vorige propositie) de drager van de functionaal ϕ, en noteren deze projectie met supp(ϕ).*

Merk op:
i. dat $(1 - q)M$ de deelruimte van M is die door ϕ niet op nul wordt afgebeeld.
ii. De gewichten en sporen op M vallen ook onder deze categorie, van vormen.

3.1.6 Het uitgebreid positief deel

Definitie 3.10 *Met M_* noteren we de preduale van de von Neumann-algebra M en hiermee bedoelt men de verzameling van σ-zwak continue lineaire vormen op M.*

Definitie 3.11 *Beschouw M als von Neumann-algebra met M_* als préduale. m Wordt dan een veralgemeend positieve operator geaffilieerd aan M genoemd als*

$$m : M_*^+ \to [0, +\infty]$$

zodanig dat:

i. $m(\lambda\phi) = \lambda m(\phi) \quad \forall \phi \in M_*^+, \lambda \geq 0$

ii. $m(\phi + \psi) = m(\phi) + m(\psi) \quad \psi, \phi \in M_*^+$

iii. m is beneden semi-continu voor de $\sigma(M_*, M)$ topologie op M_*.

De $\sigma(M_*, M)$-topologie is de zwakste topologie zodanig dat voor alle $\chi \in M$ de afbeeldingen van de volgende vorm continu zijn:

$$\begin{aligned} M_* &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(\chi) \end{aligned}$$

De verzameling van al die veralgemeend positieve operatoren geaffilieerd aan M noemen we het uitgebreid positief deel $\hat{M}_+$ van M. Dit wordt het uitgebreid deel genoemd omdat we M_+ wel degelijk als een deel van $\hat{M}_+$ kunnen beschouwen: Definieer voor elke $\chi \in M_+$ de volgende afbeelding:

$$\begin{aligned} m_\chi : M_*^+ &\to [0, +\infty] \\ \phi &\mapsto \phi(\chi) \end{aligned}$$

Deze afbeelding voldoet aan de voorwaarden om een veralgemeend positieve operator te vormen:

i. $m_\chi(\lambda\phi) = (\lambda\phi)(\chi) = \lambda\phi(\chi) = \lambda m_\chi(\phi)$

ii. $m_\chi(\phi + \psi) = (\phi + \psi)(\chi) = \phi(\chi) + \psi(\chi) = m_\chi(\phi) + m_\chi(\psi)$

iii. Zij $\phi_0 \in M_*^+$. Kies dan $\epsilon > 0$ willekeurig. Beschouw dan de basisomgeving V in M_*^+ zodat $\phi \in V \Leftrightarrow |\phi(\chi) - \phi_0(\chi)| < \epsilon$. Als dan $\phi \in V$, dan zal $|\phi(\chi) - \phi_0(\chi)| < \epsilon$ zodat $\phi(\chi) > \phi_0(\chi) - \epsilon$. Merk op dat we hier dus zelfs continuïteit bekomen.

De gebruikelijke bewerkingen op M_+ kunnen we ook uitbreiden tot op $\hat{M}_+$

Definitie 3.12 [2], Hfdst 4
Zij $m, n \in \hat{M}_+, \lambda \geq 0$ en $a \in M$. Dan definiëren we $m \dot{+} n, \lambda m$ en $a^* \,.m\,.a$ als volgt:

$$(m \dot{+} n)(\phi) = m(\phi) + n(\phi) \quad \phi \in M_*^+ \tag{3.1}$$

$$(\lambda m)(\phi) = \lambda m(\phi) \quad \phi \in M_*^+ \tag{3.2}$$

$$(a^* \,.m\,.a)(\phi) = m(a\phi a^*) \quad \phi \in M_*^+ \tag{3.3}$$

waarbij $a\phi a^* = \phi(a^* \,.\, a)$.

De definities vallen samen met de gebruikelijke operaties in M_+ als m en n begrensd zijn. Immers, zij $a, b \in M_+, \lambda \geq 0$. Stel $m_a(\phi) = \phi(a)$ en $m_b(\phi) = \phi(b)$. Dan geldt er:

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.1:

$$\begin{aligned} m_{a+b}(\phi) &= \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \\ &= m_a(\phi) + m_b(\phi) = (m_a + m_b)(\phi) \end{aligned}$$

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.2:

$$\begin{aligned} m_{\lambda a}(\phi) &= \phi(\lambda a) = \lambda\phi(a) \\ &= \lambda m_a(\phi) = (\lambda m_a)(\phi) \end{aligned}$$

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.3:

$$\begin{aligned} m_{a^*ba}(\phi) &= \phi(a^*ba) = (a\phi a^*)(b) \\ &= m_b(a\phi a^*) = (a^* m_b a)(\phi) \end{aligned}$$

Opmerking :
Als $(m_i)_{i\in I}$ een stijgend net is van elementen uit $\hat{M}_+$, dan definieert

$$m(\phi) = \sup_{i\in I} m_i(\phi), \phi \in M_*^+$$

een element van $\hat{M}_+$. Dit volgt uit:

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.1:

$$\begin{aligned} m(\phi_1 + \phi_2) &= \sup_{i\in I} m_i(\phi_1 + \phi_2) \\ &= \sup_{i\in I}(m_i(\phi_1) + m_i(\phi_2)) \\ &= \sup_{i\in I} m_i(\phi_1) + \sup_{i\in I} m_i(\phi_2) \\ &= m(\phi_1) + m(\phi_2) \end{aligned}$$

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.2:

$$\begin{aligned} m(\lambda\phi) &= \sup_{i\in I} m_i(\lambda\phi) = \sup_{i\in I} \lambda m_i(\phi) \\ &= \lambda \sup_{i\in I} m_i(\phi) = \lambda m(\phi) \end{aligned}$$

- Er is voldaan aan voorwaarde 3.3
  Het supremum van beneden semicontinue functies is opnieuw een beneden semicontinue functie.

Propositie 3.13 ([2], II, 1, Theorema 5)
Zij M een von Neumann-algebra . Elke $m \in \hat{M}_+$, heeft een unieke spectrale resolutie van de vorm

$$m(\phi) = \int_0^{+\infty} \lambda d(\phi(E(\lambda))) + \infty \cdot \phi(p) \quad \phi \in M_*^+$$

waarbij $E(\lambda)$ met $\lambda \in [0, +\infty[$ een stijgende familie van projecties in M, zodat $\lambda \mapsto E(\lambda)$ sterk rechtscontinu is en $p = 1 - \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$. Bovendien geldt dan ook nog dat

$$\begin{aligned} E(0) = 0 &\Leftrightarrow m(\phi) > 0 \quad \forall \phi \in M_*^+ \backslash \{0\} \\ p = 0 &\Leftrightarrow \{\phi \in M_*^+ \,|\, m(\phi) < +\infty\} \text{ dicht in } M_*^+ \end{aligned}$$

Stelling 3.14 ([2],II,1)
Elke $m \in \hat{M}_+$, is de puntsgewijze limiet van een stijgende rij van begrensde operatoren in M_+.

Stelling 3.15 ([2],II,1, Propositie 12)
Elk normaal gewicht ϕ op M heeft een unieke uitbreiding (genoteerd met $\hat{\phi}$) tot $\hat{M}_+$ zodat:

i. $\hat{\phi}(m \dot{+} n) = \hat{\phi}(m) + \hat{\phi}(n) \quad m, n \in \hat{M}_+$

ii. $\hat{\phi}(\lambda m) = \lambda \hat{\phi}(m) \quad \lambda \geq 0, m \in \hat{M}_+$

iii. $m_i \nearrow m$ *betekent dat* $m_i(\omega) \nearrow m(\omega) \quad \forall \omega \in M_*^+$

Nu we het uitgebreid positief deel kennen kunnen we ook overgaan tot de definitie van een operatorwaardig gewicht:

Definitie 3.16 *Beschouw M, N als twee von Neumann-algebras waarbij $N \subseteq M$, dan definieert de afbeelding*

$$T : M_+ \to \hat{N}_+$$

een operatorwaardig gewicht, als T aan de volgende voorwaarden voldoet:

i. $T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in M_+$

ii. $T(x + y) = T(x) \dot{+} T(y) \quad \forall x, y \in M_+$

iii. $T(a^* x a) = a^* . T(x) . a \quad \forall x \in M_+, \forall a \in N$

iv. Als T normaal is dan zal:
$x_i \nearrow x \Rightarrow T(x_i) \nearrow T(x) \quad x_i, x \in M_+$

Analoog zoals bij gewone gewichten stellen we dan
$n_T = \{x \in M | \, \|T(x^* x)\| < +\infty\}$
$m_T = n_T^* n_T = Span\{y^* x | x, y \in n_T\}$
met $\|T(x^* x)\| < +\infty$ wordt bedoeld dat $T(x^* x) \in N_+$ dan geldt:

- $m_T = Span\{x \in M_+ | \|Tx\| < +\infty\}$
- T heeft een unieke lineaire uitbreiding:
  $\dot{T} : m_T \to N$ die voldoet aan $\dot{T}(axb) = a\dot{T}(x)b$
- $\dot{T}(m_T)$ is σ-zwak dicht in N.
- T wordt trouw genoemd als uit $T(x^* x) = 0$ volgt dat $x = 0$
- T wordt semi-eindig genoemd als n_T σ-zwak dicht is in M.

3.1.7 Voorbeelden van uitgebreide positieve delen.

Voorbeeld 1 Stel (X, Ω, μ) als een maatruimte. Dan wordt het uitgebreid positief deel van $L^\infty(X,\mu)^+$ gegeven door de volgende verzameling van functies

$$\{f : X \to [0, +\infty] \mid f \textit{ is positief meetbaar}\}$$

Deze laatste verzameling bevat dus ook de functies die de waarde $+\infty$ kunnen aannemen op een meetbare verzameling met maat verschillend van 0.

Voorbeeld 2 Hier gaan we het uitgebreid positief deel van $\mathbb{C}^{2\times 2}$ proberen te zoeken, we gaan dit doen met behulp van de spectrale resolutie voor zo'n element uit het uitgebreid positief deel.

Stel

$$\mathbb{C}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

als de verzameling van de 2×2 matrices met coëfficiënten in $\mathbb{C}$. Dan weten we uit het eerste hoofdstuk dat $\mathbb{C}^{2\times 2} \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ en in het bijzonder zal $\mathbb{C}^{2\times 2}$ een von Neumann-algebra vormen voor de normale bewerkingen met matrices.

1. De positieve elementen van $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

   Als $A \in (\mathbb{C}^{2\times 2})_+$, dan bestaat er een $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ zo dat

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

   Dus zal A van de volgende vorm zijn:

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix}$$

   waarbij dan $a, d \geq 0$ zijn.

   Vervolgens berekenen we de eigenwaarden van A: We verkrijgen als karakteristieke vergelijking

   $$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -\overline{b} & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - |b|^2$$

   Dat levert ons voor λ_1 en λ_2 de volgende oplossingen:

   $$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4|b|^2}}{2} \\ &= \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4|b|^2}}{2} \end{aligned}$$

   We vinden dus twee (al dan niet verschillende) reële eigenwaarden. Bovendien zijn λ_1 en λ_2 positief a.s.a. $(a+d)^2 \geq (a-d)^2 + 4|b|^2$ a.s.a. $ad \geq |b|^2$. Dus als $A \in (\mathbb{C}^{2\times 2})_+$, dan is A van de vorm:

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix}$$

   met dan $a, d \geq 0$ en $detA = ad - |b|^2 \geq 0$.

2. Het uitegebreid positief deel.
   Zij $m \in (\mathbb{C}^{2\times 2})^{\wedge}_{+}$. We weten dan dat m een unieke spectrale resolutie heeft van de volgende vorm:
   $$m = A + \infty \,.\, p$$
   met p als een projectie in $\mathbb{C}^2$ en A een positieve (begrensde), operator op $(p\mathbb{C}^2)^{\perp}$. We onderscheiden nu de verschillende mogelijkheden voor p:

   - $p = 0$
     Dan zal A tot $(\mathbb{C}^{2\times 2})_+$ behoren. We onderscheiden nu nog twee mogelijke gevallen voor de eigenwaarden.
     - Veronderstel dat $A \in (\mathbb{C}^{2\times 2})_+$ twee eigenwaarden $\lambda_1 \geq 0$ en $\lambda_2 \geq 0$ heeft. Zij E_{λ_i} de egenruimte van λ_i met $i : 1, 2$. Veronderstel dat
       $$E_{\lambda_1} = \mathbb{C} \,.\, (\alpha_1, \beta_1) \; met \; \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C} \; en \; |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$$
       en
       $$E_{\lambda_2} = \mathbb{C} \,.\, (\alpha_2, \beta_2) \; met \; \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{C} \; en \; |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1$$
       Dan is
       $$A = \lambda_1 \,.\, \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \alpha_1\overline{\beta}_1 \\ \overline{\alpha}_1\beta_1 & |\beta_1|^2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \,.\, \begin{pmatrix} |\alpha_2|^2 & \alpha_2\overline{\beta}_2 \\ \overline{\alpha}_2\beta_2 & |\beta_2|^2 \end{pmatrix}$$
     - Als $A \in (\mathbb{C}^{2\times 2})_+$ slechts één eigenwaarde $\lambda \geq 0$ heeft, dan is
       $$A = \lambda \,.\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - $p = 1_{\mathbb{C}^2}$.
     Dan is voor elke $\phi \in (\mathbb{C}^{2\times 2})^{+}_{*} : m(\phi) = \infty \, \phi(1_{\mathbb{C}^2})$. We kunnen dit voorstellen door:
     $$\infty \,.\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - $dim(p\mathbb{C}^2) = 1$.
     Zij $\{e_1, e_2\}$ de standaardbasis in $\mathbb{C}^2$ en veronderstel dat p de projectie is op
     $$\mathbb{C} \,.\, (\alpha, \beta) \; met \; (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \; en \; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$
     De matrix van p t.o.v. de standaardbasis in $\mathbb{C}^2$ wordt dan gegeven door:
     $$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta} \\ \overline{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$
     Dan is $1 - p$ de projectie op $\mathbb{C} \,.\, (\overline{\beta}, -\overline{\alpha})$. De matrix van $1 - p$ t.o.v. de standaardbasis wordt dan gegeven door:
     $$\begin{pmatrix} |\beta|^2 & -\alpha\overline{\beta} \\ -\overline{\alpha}\beta & |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$
     De aktie van A op $\mathbb{C}(\overline{\beta}, -\overline{\alpha})$ bestaat dan in vermenigvuldigen met een positief getal $\lambda \geq 0$. Voor elke $\phi \in (\mathbb{C}^{2\times 2})^{+}_{*}$ is dus:
     $$m(\phi) = \lambda \,.\, \phi(1 - p) + \infty \,.\, \phi(p)$$

We kunnen dit voorstellen door:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} |\beta|^2 & -\alpha\overline{\beta} \\ -\overline{\alpha}\beta & |\alpha|^2 \end{pmatrix} + \infty \cdot \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta} \\ \overline{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

waarbij $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ en $\lambda \geq 0$.

3.2 Het duale gewicht op gekruiste produkten

3.2.1 De constructie

We werken in deze paragraaf over een von Neumann-algebra M, met een normaal, trouw en semi-eindig spoor φ_0. Beschouw dan N als het gekruiste produkt $R(M, \sigma^{\varphi_0})$ met σ^{φ_0} als modulaire automorfisme groep geassocieerd aan φ_0. Merk op (uit paragraaf 1) dat N een von Neumann-algebra over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ vormt, we behouden ook de notaties uit de eerste paragraaf en identificeren $\pi(M)$ met M.

Nu rijst er de vraag of we met een gewicht φ op M eventueel een gewicht $\tilde{\varphi}$ op het gekruiste produkt $N = R(M, \sigma^{\varphi_0})$ kunnen associëren. Onder een aantal voorwaarden op φ gaat dat inderdaad het geval zijn. In deze paragraaf gaan we dit dan ook wat nader toelichten. De volledige opbouw, met bewijzen en stellingen werd door U. Haagerup uitvoerig behandeld in enkele artikels ([11], [12],[13],[14]) en beslaat ongeveer 100 pagina's, aangezien de opbouw van dit gewicht natuurlijk niet het hoofddoel van deze verhandeling is, wordt dit aan de lezer overgelaten, en gaan we ons tevreden stellen met een zeer ruwe schets van de gevolgde weg, waarbij enkel de begrippen die later van belang zullen zijn nader toegelicht zullen worden.

Merk op dat φ_0 het gewicht op, M voorstelt waarmee we het gekruiste produkt N geconstrueerd hebben. φ Daarentegen stelt een willekeurig gewicht op M voor.

Noteer met $\theta : \mathbb{R} \to Aut(N)$ de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N. Alle θ_s voor $s \in \mathbb{R}$ vormen dan de automorfismen van N gedefinieerd door:

$$x \mapsto \begin{cases} \theta_s x = x & \forall x \in M \\ \theta_s \lambda(t) = e^{-ist}\lambda(t) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Uit het voorgaande volgt dan onmiddellijk dat M een deel gaat zijn van de vaste punten voor alle θ_s, in het bijzonder volgt er zelfs uit ([11], Lemma 3.6) dat:

$$M = \{y \in N | \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s y = y\} \tag{3.4}$$

Met behulp van deze parametergroep van automorfismen kunnen we nu een operatorwaardig gewicht van N naar M definiëren nl.:

$$T : N_+ \to \hat{M}_+ \subseteq \hat{N}_+$$

$$Tx = \int_{\mathbb{R}} \theta_s(x) ds \quad x \in N_+$$

Tx gaat wel degelijk tot het uitgebreid deel van $N = R(M, \sigma_t^{\varphi_0})$ behoren, dat wil zeggen dat Tx een afbeelding van de volgende vorm definieert:

$$Tx : N_*^+ \to [0, +\infty]$$

De aktie van Tx op N_*^+ wordt op de volgende manier gegeven:$\forall \chi \in N_*^+$:

$$Tx(\chi) = \int_{\mathbb{R}} \chi \circ \theta_s(x) ds$$

Aangezien uit de definitie van θ_s volgt dat:

$$\begin{aligned} \theta_t \circ Tx &= \int_{\mathbb{R}} \theta_t(\theta_s(x)) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \theta_{t+s}(x) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \theta_s(x) ds = Tx \end{aligned}$$

en uit (3.4) kunnen we dus besluiten dat de waarden van T in $\hat{M}_+$ terecht zullen komen.

Voor elk normaal gewicht φ op M noteren we met $\hat{\varphi}$ de uitbreiding van φ tot op $\hat{M}_+$, zoals beschreven in een voorgaande paragraaf. Dan definiëren we $\tilde{\varphi}$ op de volgende manier:

$$\tilde{\varphi} = \hat{\varphi} \circ T \tag{3.5}$$

Uit ([13], propositie 1.10 en propositie 2.3,[12], sectie 1) volgt dan dat $\tilde{\varphi}$ een normaal gewicht op N zal zijn. Deze $\tilde{\varphi}$ wordt het duale gewicht van φ genoemd.

Uit (3.4) en (3.5) volgt ook dat:

$$\forall s \in \mathbb{R} : \tilde{\varphi} \circ \theta_s = \tilde{\varphi}$$

Bovendien zal ([13],Theorema 4.7) voor φ, ψ als normale, trouwe en semi-eindige gewichten gelden dat:

i. $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ zijn normaal, trouw en semi-eindig.

ii. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M : \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$

iii. $\forall t \in \mathbb{R} : (D\tilde{\varphi} : D\tilde{\psi})_t = (D\varphi : D\psi)_t$

Vervolgens behandelen we nog enkel belangrijke eigenschappen en lemma's van duale gewichten, zoals aangekondigd gaan we echter niet alles tot in het detail aantonen.

Lemma 3.17 *i. De afbeelding*

$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

vormt een bijectie van de verzameling van alle normale, semi-eindige gewichten op M naar de verzameling van alle normale, semi-eindige gewichten ψ op N die aan de volgende eigenschap voldoen:

$$\forall s \in \mathbb{R} : \psi \circ \theta_s = \psi$$

ii. Voor alle normale gewichten ψ, φ op M en alle $x \in M$ verkrijgen we hetvolgende:

- $\widetilde{(\varphi + \psi)} = \tilde{\varphi} + \tilde{\psi}$

- $\widetilde{(x.\varphi.x^*)} = x.\tilde{\varphi}.x^*$
- $supp(\tilde{\varphi}) = supp(\varphi)$

BEWIJS:

i. We tonen eerst aan dat als φ een normaal en semi-eindig gewicht op M vormt dat dan $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi} \circ T$ een normaal en semi-eindig gewicht op N vormt.

   - De normaliteit volgt omdat ook T normaal is. Want stel

     $$x_i \nearrow x \Rightarrow T(x_i) \nearrow T(x) \Rightarrow \hat{\varphi}(T(x_i)) \nearrow \varphi(\hat{T(x)})$$

     en dit voor $x_i, x \in M_+$
   - De semi-eindigheid van $\tilde{\varphi}$:
     we tonen eerst aan dat $n_{\hat{\varphi}\circ T}$ sterk dicht is in n_T wat op zijn beurt sterk dicht is in N. Neem daarvoor

     $$\alpha \in n_T = \{\alpha \in N | \, \|T(\alpha^*\alpha)\| < +\infty\},$$

     dus ook $T(\alpha^*\alpha) \in M_+$, dan bestaat er wegens de semi-eindigheid van φ een net $(a_i)_{i\in I}$ in n_φ zodat $a_i \to 1$ sterk. Aangezien dan:

     $$\begin{aligned} \varphi \circ T(a_i^*\alpha^*\alpha a_i) &= \varphi(a_i^* T(\alpha^*\alpha) a_i) \\ &\leq \|T(\alpha^*\alpha)\| \varphi(a_i^* a_i) < +\infty \end{aligned}$$

     Bijgevolg zal dus $\alpha a_i \in n_{\varphi\circ T}$, Omdat $a_i \to 1$ sterk, zal $n_{\varphi\circ T}$ sterk dicht zijn in n_T waaruit het gevraagde volgt.

ii. We behandelen elk puntje van (ii) apart:

   - We merken eerst op dat $(\varphi + \psi)\hat{} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}$, dit volgt omdat $\hat{\varphi} + \hat{\psi}$ als afbeelding van $\hat{M}_+$ naar $[0, +\infty]$ ook aan dezelfde eigenschappen voldoet (cfr. propositie 3.15), die $(\varphi + \psi)\hat{}$ karakterizeren. Samenstelling met T levert ons het gevraagde.
   - Zo voldoet ook $x\hat{\varphi}x^*$ aan dezelfde eigenschappen die $(x\varphi x^*)\hat{}$ karakterizeren. Samenstelling met T levert het gevraagde.
   - stel $p_0 = 1 - supp\,\varphi$ dan is Mp_0 de σ-zwakke sluiting van $N_\varphi = \{x \in M | \varphi(x^*x) = 0\}$ in M. Stel dan analoog $q_0 = 1 - supp\,\tilde{\varphi}$ en Nq_0 als σ-zwakke sluiting van $N_{\tilde{\varphi}} = \{y \in N | \tilde{\varphi}(y^*y) = 0\}$ in N. Om dit laatste puntje aan te tonen, moeten we bewijzen dat $q_0 = p_0$.
     Omdat $\forall y \in n_T, \forall x \in N_\varphi$:

     $$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x^*y^*yx) &= \varphi(T(x^*y^*yx)) \\ &= \varphi(x^*T(y^*y)x) \\ &\leq \|T(y^*y)\| \varphi(x^*x) = 0 \end{aligned}$$

     krijgen we dat $n_T N_\varphi \subseteq N_{\tilde{\varphi}}$. Omdat n_T σ-zwak dicht is in N verkrijgen we:

     $$N_\varphi \subseteq \overline{n_T}^{\sigma-zwak} N_\varphi \subseteq \overline{n_T N_\varphi}^{\sigma-zwak} \subseteq \overline{N_{\tilde{\varphi}}}^{\sigma-zwak}$$

en dat levert:

$$\overline{N_\varphi}^{\sigma-zwak} \subseteq \overline{N_{\tilde{\varphi}}}^{\sigma-zwak}$$

dus

$$p_0 \leq q_0$$

Omdat nu $(\forall s)$ $\tilde{\varphi}$ invariant is onder θ_s zal ook $supp(\tilde{\varphi})$ invariant zijn onder θ_s, bijgevolg geldt er dus dat $supp(\tilde{\varphi}) \in M$ en dus ook dat $1-supp(\tilde{\varphi}) = q_0 \in M$.
Om nu de gelijkheid te verkrijgen d.w.z. $p_0 = q_0$, moeten we nog aantonen dat $\varphi(q_0) = 0$, dan volgt het gevraagde (cfr. de definitie van drager 3.9). Omdat $\dot{T}(m_T)$ σ-zwak dicht is in M, moeten we dat enkel aantonen voor $\dot{T}(x)$ met $x \in m_T$:

$$\forall x \in m_T : \varphi(q_0\dot{T}(x)q_0) = \varphi(\dot{T}(q_0xq_0)) = \tilde{\varphi}(q_0xq_0) = 0$$

We verkrijgen dus dat $supp(\tilde{\varphi}) = supp(\varphi)$.

iii. Er rest ons enkel de bijectiviteit aan te tonen:

- $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ is injectief omdat opnieuw $\dot{T}(m_T)$ σ-zwak dicht is in M en

$$\varphi(\dot{T}x) = \tilde{\varphi}(x) \ \ \forall x \in m_T$$

- Voor trouwe gewichten is de surjectiviteit al aangetoond (cfr. [11]) dat wil dus in feite zeggen dat voor ψ trouw op N er een normaal semi-eindig en trouw gewicht φ op M bestaat zodanig dat $\tilde{\varphi} = \psi$. Beschouwen we nu het meer algemene geval, dat wil dus zeggen ψ niet noodzakelijk trouw. Stel dan $q_0 = 1 - supp(\psi)$
Omdat $\psi \circ \theta_s = \psi \ \ \forall s \in \mathbb{R}$, $M = \{y \in M | \forall s \in \mathbb{R}, \theta_s y = y\}$ enomdat

$$\begin{aligned} \theta_s(q_0) &= \theta_s(1 - supp\,\psi) \\ &= 1 - \theta_s(supp(\,\psi)) \\ &= 1 - supp\,\psi \end{aligned}$$

Verkrijgen we dat $q_0 \in M$
Neem dan een normaal, semi-eindig gewicht χ_0 op M zodat

$$supp\chi_0 = q_0.$$

Dan is $\tilde{\chi_0}$ een normaal, semi-eindig θ-invariant gewicht op N met $supp\tilde{\chi_0} = q_0$.
Dan zal $\tilde{\chi}_0 + \psi$ ook een normaal en semi-eindig gewicht definiëren dat bovendien trouw is, bijgevolg bestaat er een gewicht φ op M, normaal trouw en semi-eindig zodanig dat $\tilde{\chi}_0 + \psi = \tilde{\varphi}$. Dan verkrijgen we dat:

$$\begin{aligned} \psi &= (1 - q_0)(\tilde{\chi}_0 + \psi)(1 - q_0) \\ &= (1 - q_0)\tilde{\varphi}(1 - q_0) \\ &= ((1 - q_0)\varphi(1 - q_0))\tilde{} \end{aligned}$$

■

3.2.2 Uitbreiding van de duale aktie

We beschouwen in deze paragraaf opnieuw M als von Neumann-algebra , met hierop een semi-eindig, trouw en normaal gewicht φ_0. Noteer dan ook analoog als voordien met N het gekruiste produkt, en noteer met θ de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N.

Verder in dit hoofdstuk gaan we zeer vaak de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N ook op onbegrensde operatoren laten werken. Omdat we deze aktie enkel op begrensde operatoren gedefinieerd hebben, kunnen we ons afvragen dat dit wel goed gedefinieerd zal zijn, en als er dan toch een uitbreiding zou zijn, hoe is het dan gesteld met de eigenschappen die op θ_s lagen, d.w.z. zal θ_s nog multiplicatief zijn, wat gebeurt er met zijn aktie op spectrale projecties wat gebeurt er met de hermitische toevoeging. Het zal uit de volgende stelling volgen dat we θ_s op een elegante manier kunnen uitbreiden, en dat θ_s zich mooi gaat gedragen t.o.v. de verschillende bewerkingen.

Stelling 3.18 *Als $s \mapsto \theta_s$ de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N voorstelt dan kan θ_s ook op de volgende manier geschreven worden: $\forall s \in \mathbb{R}, \forall y \in N$:*

$$\theta_s(y) = \mu_s y \mu_s^{-1}$$

Waarbij μ_s een unitaire operator op $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ voorstelt die gegeven wordt door: $\forall \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(\mu_s \xi)(t) = e^{-ist}\xi(t)$$

Bewijs:
Vooraleer we gaan aantonen dat θ_s daadwerkelijk in die vorm geschreven kan worden gaan we $(\mu_s)^{-1}$ op een andere alternatieve manier schrijven:
Omdat

$$(\mu_s)\xi(t) = e^{-ist}\xi(t)$$

voor $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $t, s \in \mathbb{R}$ zal de aktie van $(\mu_s)^{-1}$ gegeven worden door:

$$(\mu_s)^{-1}\xi(t) = e^{ist}\xi(t) = \mu_{-s}\xi(t)$$

Het is dan ook met deze laatste vorm μ_{-s} dat we gaan verderwerken.

We tonen nu aan dat de aktie van θ_s op de voortbrengers wel degelijk gegeven wordt door de formule uit de stelling.

- $\theta_{\mathbf{s}}\mathbf{x} = \mu_{\mathbf{s}}\mathbf{x}\mu_{\mathbf{-s}}$ (Voor $x \in M$)
  We identificeren hier zoals voordien $\pi(x)$ met x, neem $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ willekeurig en neem $r \in \mathbb{R}$. Dan moeten we aantonen dat:

  $$\left[\left(\mu_s x \mu_{-s}\right)\xi\right](r) = \left(x\xi\right)(r)$$

  en dit volgt omdat:

  $$\begin{aligned}\left[\left(\mu_s x \mu_{-s}\right)\xi\right](r) &= e^{-isr}\left(x\mu_{-s}\xi\right)(r) \\ &= e^{-isr}\sigma_{-r}^{\varphi_0}\left(\mu_{-s}\xi\right)(r) \\ &= e^{-isr}\sigma_{-r}^{\varphi_0}e^{isr}\xi(r) \\ &= \left(x\xi\right)(r)\end{aligned}$$

  Dat levert ons dus de gevraagde gelijkheid.

- $\theta_{\mathbf{s}}\lambda(\mathbf{t}) = \mu_{\mathbf{s}}\lambda(\mathbf{t})\mu_{-\mathbf{s}}$ $(\forall t, s \in \mathbb{R})$
  We moeten dus in feite aantonen dat

$$\mu_s\lambda(t)\mu_{-s} = e^{-ist}\lambda(t)$$

  Neem opnieuw $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $r \in \mathbb{R}$ dan zal:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mu_s\lambda(t)\mu_{-s}\right)\xi\right](r) &= e^{-isr}\left(\lambda(t)\mu_{-s}\xi\right)(r) \\
&= e^{-isr}\left(\mu_{-s}\xi\right)(r-t) \\
&= e^{-isr}\,e^{is(r-t)}\xi(r-t) \\
&= e^{-ist}\left(\lambda(t)\xi\right)(r)
\end{aligned}$$

  En dat levert de gevraagde gelijkheid. ■

Merk op:
dat opnieuw we hier de stelling aangetoond hebben voor het specifieke geval met $\mathbb{R}$ als groep. Voor de meer algemene opbouw verwijzen we naar ([10]).

Nu gaan we nagaan wat er met de verschillende bewerkingen onder θ_s zal gebeuren: (Neem x, y als twee elementen geaffilieerd aan N.)

- θ_s schuift door de som:

$$\begin{aligned}
\theta_s(y+x) &= \mu_s(y+x)\mu_{-s} \\
&= \mu_s y\mu_{-s} + \mu_s x\mu_{-s} \\
&= \theta_s(y) + \theta_s(x)
\end{aligned}$$

- θ_s blijft multiplicatief:

$$\begin{aligned}
\theta_s(yx) &= \mu_s yx\mu_{-s} \\
&= \mu_s y\mu_{-s}\mu_s x\mu_{-s} \\
&= \theta_s(x)\theta_s(y)
\end{aligned}$$

- θ_s schuift door de hermitische toevoeging.

$$\begin{aligned}
(\theta_s b)^* &= (\mu_s b\mu_{-s})^* \\
&= (\mu_{-s})^* b^* (\mu_s)^* \\
&= \mu_s b^*\mu_{-s} \\
&= \theta_s(b^*)
\end{aligned}$$

- θ_s schuift door de spectrale projecties.
  Om dit laatste aan te tonen moeten we gebruik maken van wat operatorentheorie. Stel a als een positieve operator geaffilieerd aan N, en met spectrale decompositie:

$$a = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$

  Dan willen we aantonen dat

$$\theta_s(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(a)) = \chi_{]\epsilon,+\infty[}(\theta_s a)$$

We tonen echter eerst aan dat:

$$\theta_s\left(\int_{\mathbb{R}^+}\lambda dE(\lambda)\right)=\int_{\mathbb{R}^+}\lambda d\theta_s(E(\lambda))$$

Neem $\xi\,,\,\eta\in\mathcal{H}$ willekeurig , dan geldt er:

$$\begin{aligned}
&<\theta_s\left(\int_{\mathbb{R}^+}\lambda dE(\lambda)\right)\xi\,,\,\eta>\\
=\;&<\mu_s\left(\int_{\mathbb{R}^+}\lambda\, dE(\lambda)\right)\mu_{-s}\xi\,,\,\eta>\\
=\;&<\left(\int_{\mathbb{R}^+}\lambda dE(\lambda)\right)\mu_{-s}\xi\,,\,\mu_{-s}\eta>\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^+}\lambda\, d<E(\lambda)\mu_{-s}\xi\,,\,\mu_{-s}\eta>\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^+}\lambda d<\mu_s E(\lambda)\mu_{-s}\xi\,,\,\eta>\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^+}\lambda\, d<\theta_s(E(\lambda))\xi\,,\,\eta>\\
=\;&<\int_{\mathbb{R}^+}d(\theta_s(E(\lambda))\xi\,,\,\eta>
\end{aligned}$$

Stellen we nu de spectrale decompositie van $\theta_s(a)$ gelijk aan

$$\theta_s(a)=\int_{\mathbb{R}^+}tdF(t)$$

dan verkrijgen we via het voorgaande de volgende gelijkheden

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+}\lambda dF(\lambda)&=\theta_s\left(\int_{\mathbb{R}^+}\lambda dE(\lambda)\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^+}\lambda d\theta_s(E(\lambda))
\end{aligned}$$

En dus verkrijgen we

$$\chi_{[0,\lambda]}(\theta_s(a))=F(\lambda)=\theta_s(E(\lambda))=\theta_s(\chi_{[0,\lambda]}(a))$$

Complementering, en het feit dat μ_s unitair is $\forall s\in\mathbb{R}$ levert ons dan het gevraagde.

3.3 Het normaal, trouw en semi-eindig spoor τ op $N = R(M,\sigma_t^{\varphi_0})$

Opnieuw beginnen we deze paragraaf met een aantal onbewezen resultaten, dit om zo snel mogelijk met de echte essentie te kunnen aanvangen. Noteer met τ, het normaal, trouw en semi-eindig spoor op N, dat gekarakterizeerd wordt door

$$\forall t\in\mathbb{R}:(D\tilde{\varphi_0}:D\tau)_t=\lambda(t)$$

Dit spoor gaat bovendien aan de volgende twee eigenschappen voldoen:

1. $\tilde{\varphi}_0(\,.\,)=\tau(h\,.\,)$ met h positief, zelftoegevoegd en $h^{it}=\lambda(t)$.
2. $\forall s\in\mathbb{R}:\tau\circ\theta_s=e^{-s}\tau$

3.3.1 τ definieert een spoor.

In dit stukje gaan we kort proberen te schetsen waarom τ een spoor zal definiëren, we gaan hier niet alle resultaten aantonen, maar we gaan het toch aannemelijk maken dat τ een spoor op N zal vormen. We werken, voor alle duidelijkheid met een aantal tussenstappen.

- Eerst en vooral gaan we de modulaire automorfisme groep van het gewicht $\tilde{\varphi}_0$ op N zoeken. We weten al uit het voorgaande (cfr. opmerking voor lemma 3.17) dat $\forall x \in M$ geldt:
$$\sigma_s^{\tilde{\varphi}_0}(x) = \sigma_s^{\varphi_0}(x)$$
Uit ([11] Lemma 5.2), volgt dat
$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}(\lambda(s)) = \lambda(s) = \lambda(t)\lambda(s)\lambda(t)^*$$
In het bijzonder kunnen we dan ook de werking van $\sigma_s^{\tilde{\varphi}_0}(x)$ voor $x \in M$ herschrijven, in de volgende vorm:
$$\sigma_s^{\tilde{\varphi}_0}(x) = \lambda(t)\, x\, \lambda(t)^*$$
want het linkerlid levert ons voor $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$:
$$\begin{aligned} \left((\sigma_t^{\varphi_0}(x)\xi\right)(y) &= \sigma_{-y}\left(\sigma_t^{\varphi_0}(x)\right)\xi(y) \\ &= \sigma_{-y+t}^{\varphi_0}(x)\xi(y) \end{aligned}$$
Voor het rechterlid, met $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ verkrijgen we dan:
$$\begin{aligned} \left(\lambda(t)\, x\, \lambda(t)^*\xi\right)(y) &= (x\lambda(t)^*\xi)(y-t)) \\ &= \sigma_{-y+t}^{\varphi_0}(x)\left(\lambda(t)^*\xi\right)(y-t) \\ &= \sigma_{-y+t}(x)\xi(y) \end{aligned}$$
De werking van de modulaire automorfisme groep geassocieerd aan het gewicht $\tilde{\varphi}_0$ is dus volledig bepaald door de volgende aktie op de voortbrengers van het gekruiste produkt $N = R(M, \sigma^{\varphi_0})$, stel namelijk z als een voortbrenger (d.w.z. z is gelijk aan een zekere x uit M, of z is gelijk aan $\lambda(s)$ voor $s \in \mathbb{R}$) dan krijgen we:
$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}(z) = \lambda(t)\, z\, \lambda(t)^*$$
- We weten nu de werking van de modulaire automorfismegroep, we kunnen nu nagaan dat er aan de volgende eis voldaan is:
$$\lambda(t+s) = \lambda(t)\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}(\lambda(s))$$
zodat we dan de stelling 3.7 kunnen toepassen en dus al weten dat τ een normaal trouw en semi-eindig gewicht zal definiëren. We gaan hier kort na dat λ aan die eis voldoet: (Stel $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$), het linkerlid levert ons:
$$\left(\lambda(t+s)\xi\right)(x) = \xi(x-t-s)$$
Het rechterlid:
$$\begin{aligned} \left(\lambda(t)\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}\Big(\lambda(s)\Big)\xi\right)(x) &= \left(\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}(\lambda(s))\xi\right)(x-t) \\ &= \left(\lambda(s)\xi\right)(x-t) \\ &= \xi(x-t-s) \end{aligned}$$

- We weten nu dat τ al een uniek bepaald semi-eindig, trouw en normaal gewicht definieert. We hebben nu echter al voldoende gegevens om de modulaire automorfisme groep van τ te berekenen, deze zal triviaal zijn en bijgevolg weten we uit stelling 3.2 dat τ een spoor definieert. omdat nu wegens stelling 3.5

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_0}(x) = \lambda(t)\,\sigma_t^{\tau}(x)\,\lambda(t)^*$$

Verkrijgen we het gevraagde:

$$\begin{aligned}\sigma_t^{\tau}(x) &= \lambda(t)^*(\sigma^{\tilde{\varphi}_0}(x))\lambda(t)\\ &= \lambda(t)^*(\lambda(t)\,x\,\lambda(t)^*)\lambda(t) = x\end{aligned}$$

Wanneer we aannemen dat $\tilde{\varphi}_0(\,.\,) = \tau(h\,.\,)$ met $h^{it} = \lambda(t)$ weten we, omdat $\theta_s\,(\lambda(t)) = e^{-ist}\lambda(t)$ dat $\theta_s(h) = e^{-s}h$. Omdat het gewicht $\varphi_0 \circ T$ nu ook θ_s invariant is verkrijgen we dan

$$\begin{aligned}\tau(\theta_s(x)) &= \varphi_0 \circ T\left(h^{-1}\,.\,\theta_s(x)\right)\\ &= \varphi_0 \circ T\left(\theta_{-s}\left(h^{-1}\,.\theta_s(x)\right)\right)\\ &= \varphi_0 \circ T\left(\theta_{-s}(h^{-1})\,.x\right)\\ &= e^{-s}\left(\varphi_0 \circ T(h^{-1}\,x)\right) = e^{-s}\tau(x)\end{aligned}$$

en dit toont gebruikmakend van de eerste eigenschap de tweede eigenschap van het spoor τ aan.

3.3.2 Eigenschappen i.v.m. het spoor τ

Met elke $h \in \hat{N}_+$ associëren we het normale gewicht $\tau(h\,.\,)$ op N (Meer hierover is opnieuw terug te vinden in [14]). Er volgen nu een aantal niet bewezen eigenschappen, deze eigenschappen zijn terug te vinden, met bewijs, in de volgende twee artikels van Uffe Haagerup ([13, 14]).

Lemma 3.19 *i. De afbeelding*

$$h \mapsto \tau(h\,.\,)$$

is een bijectie van $\hat{N}_+$ naar de verzameling van de normale gewichten op N. Bovendien vormt ze zelfs een bijectie van de positief, zelftoegevoegde operatoren, geaffilieerd met N naar de normaal, semi-eindige gewichten op N.

ii. Voor alle $h, k \in \hat{N}_+$ en alle $x \in N$, verkrijgen we dan de volgende drie eigenschappen:

(a) $\tau((h\dot{+}k)\,.\,) = \tau(h\,.\,) + \tau(k\,.\,)$,

(b) $\tau((x.h.x^*)\,.\,) = x\,.\,\tau(h\,.\,)\,.\,x^*$,

(c) $supp\,\tau(h\,.\,) = supp\,h$.

Voor de definitie van de drager van een operator verwijzen we naar paragraaf 1.2.3 uit hoofdstuk 1.

Definitie 3.20 *Voor elk normaal gewicht φ op M definiëren we dan h_φ als het unieke element van $\hat{N}_+$, dat gegeven wordt door:*

$$\tilde{\varphi} = \tau(h_\varphi\,.) \tag{3.6}$$

Propositie 3.21 *i. De afbeelding*

$$\varphi \mapsto h_\varphi$$

vormt een bijectie van de verzameling van de normale, semi-eindige gewichten op M naar de verzameling van alle positieve, zelftoegevoegde operatoren h geaffilieerd aan N, die bovendien ook nog aan de volgende eigenschap voldoen:

$$\forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s} h. \tag{3.7}$$

ii. Voor alle normale gewichten φ en ψ op en alle $x \in M$, verkrijgen we dan

(a) $h_{\varphi+\psi} = h_\varphi \dot{+} h_\psi$,
(b) $h_{x\,.\,\varphi\,.\,x^*} = x\,.\,h_\varphi\,.\,x^*$,
(c) $supp\, h_\varphi = supp\, \varphi$.

Bewijs:
Deze propositie is in feite een rechtstreeks gevolg van lemma 3.17 en lemma 3.19. We moeten enkel nog aantonen dat een positief, zelftoegevoegde operator h geaffilieerd aan N aan (3.7) voldoet enkel en alleen als het corresponderende gewicht $\tau(h\,.)$ θ-invariant zal zijn. Dit volgt uit de opmerkingen die na lemma 3.17 gegeven werden.

Want $\forall s \in \mathbb{R}$ hebben we dan gebruikmakend van de multipliciteit van θ_s dat:

$$\begin{aligned} \tau(e^s \theta_s(h)\,.\,) &= e^s\, \tau \circ \theta_s\,(h\theta_{-s}(\,.\,)) \\ &= \tau(h\theta_{-s}(\,.\,)) \\ &= \tau(h\,.\,) \circ \theta_{-s} \end{aligned}$$

Daaruit volgt dan hetvolgende

$$\begin{aligned} e^s \theta_s(h) = h &\Leftrightarrow \tau(e^s \theta_s(h)\,.\,) = \tau(h\,.\,) \\ &\Leftrightarrow \tau(h\,.\,) = \tau(h\,.\,) \circ \theta_{-s} \end{aligned}$$

Hieruit volgt de equivalentie tussen (3.7) en

$$\forall s \in \mathbb{R} : \tau(h\,.\,) = \tau(h\,.\,) \circ \theta_s$$

■

3.4 De τ meetbare operatoren op N

Dit paragraafje gaat zeer belangrijk zijn omdat we hier het verband gaan krijgen tussen de τ-meetbare operatoren op het gekruiste produkt N, en gewichten op M.

3.4.1 Het verband tussen de gewichten op M, en de τ-meetbare operatoren op N.

Lemma 3.22 *Zij φ een normaal, semi-eindig gewicht op M. Dan zal voor elke $\gamma \in \mathbb{R}_+$ gelden dat*

$$\tau(\chi_{]\gamma,\infty[}(h_\varphi)) = \frac{1}{\gamma}\,\varphi(1)$$

Bewijs:
We gaan het bewijs voor alle duidelijkheid opdelen in twee verschillende stappen namelijk voor $\gamma = 1$ en $\gamma \neq 1$.

- $\gamma = \mathbf{1}$
  Zij $s \in \mathbb{R}$. Omdat θ_s een automorfisme definieert en omdat $\theta_s h_\varphi = e^{-s} h_\varphi$ krijgen we :
  $$\theta_s(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,\infty[}(h_\varphi)) = e^s h_\varphi^{-1}\chi_{]1,\infty[}(e^{-s}h_\varphi).$$
  Beschouw dan
  $$h_\varphi = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE(\lambda)$$
  als spectrale decompositie van h_φ.
  Uit het voorgaande volgt er dat voor een willekeurige vectorfunctionaal $\omega_{\xi,\xi}$ waarbij ξ een eenheidsvector is en $\omega_{\xi,\xi}(a) =< a\xi, \xi >$ dat
  $$\begin{aligned}
  & \omega_{\xi,\xi}(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,\infty[}(h_\varphi))ds) \\
  = & < \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,\infty[}(h_\varphi))ds\right)\xi, \xi > \\
  = & \int_{\mathbb{R}} < (e^s h_\varphi^{-1}\chi_{]1,\infty[}(e^{-s}h_\varphi))\xi, \xi > ds \\
  = & \int_{\mathbb{R}}\int_{]0,+\infty[} e^s\lambda^{-1}\chi_{]1,+\infty[}(e^{-s}\lambda)d < E(\lambda)\xi, \xi > ds \\
  = & \int_{]0,+\infty[} \lambda^{-1}\left(\int_{]-\infty,log\lambda[} e^s ds\right) d < E(\lambda)\xi, \xi > \\
  = & \int_{]0,+\infty[} \lambda^{-1}\lambda d < E(\lambda)\xi, \xi > \\
  = & \|(supp\, h_\varphi)\xi\|^2
  \end{aligned}$$
  Zodat er dus geldt dat
  $$\int_{\mathbb{R}} \theta_s(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi))ds = supp\, h_\varphi = supp\, \varphi$$
  Uiteindelijk verkrijgen we dan omdat $\tilde{\varphi}(\,.\,) = \tau(h_\varphi\,.\,)$ het gevraagde namelijk:
  $$\begin{aligned}
  \tau(\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi)) &= \tau(h_\varphi(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi)) \\
  &= \tilde{\varphi}(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi)) \\
  &= \varphi\left(\int \theta_s(h_\varphi^{-1}\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi))ds\right) \\
  &= \varphi(supp\,\varphi) = \varphi(1).
  \end{aligned}$$

- $\gamma \neq \mathbf{1}$
  Meer algemeen hier stellen we gewoon $\gamma = e^s$, met $s \in \mathbb{R}$ dan verkrijgen we opnieuw, gebruikmakend van de opmerkingen na lemma 3.17 dat:

$$\begin{aligned}\tau(\chi_{]e^s,+\infty[}(h_\varphi)) &= \tau(\chi_{]1,+\infty[}(e^{-s}h_\varphi)) \\ &= \tau(\theta_s(\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi))) \\ &= e^{-s}\tau(\chi_{]1,+\infty[}(h_\varphi)) \\ &= e^{-s}\varphi(1)\end{aligned}$$

■

Merk op:
Het is niet zomaar triviaal dat

$$\chi_{]e^s,+\infty[}(h_\varphi) = \chi_{]1,+\infty[}(e^{-s}h_\varphi)$$

Dit vraagt echter een kleine berekening: Beschouw als spectrale decompositie van h_φ rekening houdend met het feit dat wegens propositie 3.21 h_φ positief is:

$$h_\varphi = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dE_{h_\varphi}(\lambda)$$

Dan zal de spectrale decompositie van $e^{-s}h_\varphi$ gegeven worden door:

$$|e^{-s}h_\varphi| = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-s}\lambda dE_{h_\varphi}(\lambda)$$

Een substitutie van de integratieparameter levert ons dan hetvolgende:

$$e^{-s}h_\varphi = \int_{\mathbb{R}^t} t dE_{h_\varphi}(e^s t)$$

Bijgevolg verkrijgen we, als we de spectrale decompositie van $e^{-s}h_\varphi$ noteren als

$$e^{-s}h_\varphi = \int_{\mathbb{R}^+} t dE_{e^{-s}h_\varphi}(t)$$

dat

$$E_{h_\varphi}(e^s t) = E_{e^{-s}h_\varphi}(t)$$

en dat levert ons dan het gevraagde.

Uit hoofdstuk 1, gebruikmakend van propositie 1.50 krijgen we dan het volgende maar zeer belangrijke gevolg.

Gevolg 3.23 *Zij φ een normaal semi-eindig gewicht op M. Dan zal h_φ τ-meetbaar zijn als en slechts als $\varphi \in M_*$.*

3.4.2 Aanpassing van propositie 3.21

We noteren, analoog zoals in hoofdstuk 1, $\tilde{N}$ als de verzameling van alle τ-meetbare, dicht gedefinieerde operatoren geaffilieerd aan N. Herinner dat $\tilde{N}$ een topologische *-algebra vormt voor de sterke som en het sterk produkt. In de rest van het hoofdstuk gaan we de sommen en produkten in $\tilde{N}$ altijd in de sterke zin interpreteren, ondanks het feit dat we dat niet gaan noteren. Noteer met $\tilde{N}_+$ de verzameling van alle positieve elementen van $\tilde{N}$.

Voor de werking van de automorfismen θ_s op de basisomgevingen van $\tilde{N}$ verkrijgen we hetvolgende:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \epsilon, \delta \in \mathbb{R}_+ : \theta_s(N(\epsilon, \delta)) = N(\epsilon, e^{-s}\delta) \tag{3.8}$$

aangezien voor elke $a \in \tilde{N}$

$$\begin{aligned} \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(\theta_s a)) &= \tau(\theta_s(\chi_{]\epsilon,\infty[}(a))) \\ &= e^{-s}\tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(a)) \end{aligned}$$

Vooraleer we de bijectie, zoals vermeld in propositie 3.21 kunnen aanpassen tot een bijectie tussen M_* en de deelruimte

$$\{h \in \tilde{N} \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s}h\}$$

van N, moeten we eerst nog een lemma bezien dat ons informatie zal verschaffen over het verband tussen de gewone bewerkingen en de bewerkingen uit $\hat{N}_+$.

Propositie 3.24 *i. Zij h, k twee positief, zelftoegevoegde operatoren, zodat $D(h^{1/2}) \cap D(k^{1/2})$ dicht is. Dan zal*

$$h + k \subseteq h \dot{+} k.$$

Wanneer nu $h + k$ essentieel zelftoegevoegd zal zijn, dan is zijn unieke zelftoegevoegde uitbreiding precies gelijk aan $h \dot{+} k$.
ii. Zij h een positief, zelftoegevoegde operator en x een begrensde operator, zodanig dat $D(h^{1/2}x^*)$ dicht is, dan zal

$$xhx^* \subseteq x \,.\, h \,.\, x^*$$

Wanneer dan xhx^* essentieel zelftoegevoegd zal zijn dan zal de unieke zelftoegevoegde uitbreiding precies $x \,.\, h \,.\, x^*$ zijn.

Bewijs:Omdat het bewijs nogal technisch is en weinig interessante bijdrage levert aan de rest van het geheel gaan we het niet vermelden, het kan echter gereconstrueerd worden m.b.v. volgende twee referenties, namelijk ([1],[23]) ■

Stelling 3.25 *i. De afbeelding*

$$\varphi \mapsto h_\varphi$$

uit propositie 3.21 kunnen we aanpassen tot een lineaire bijectie, (die we opnieuw met $\varphi \mapsto h_\varphi$ noteren) van M_* naar de deelruimte van $\tilde{N}$ gegeven door:

$$\{h \in \tilde{N} \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s}h\}$$

ii. Voor elke $\varphi \in M_*$ en $x, y \in M$ verkrijgen we

$$h_{x\,.\,\varphi\,.\,y^*} = x h_\varphi y^* \tag{3.9}$$

en

$$h_{\varphi^*} = (h_\varphi)^* \tag{3.10}$$

iii. Als $\varphi = u|\varphi|$ de polaire decompositie van φ zal zijn, dan is $h = u h_{|\varphi|}$ de polaire decompositie van h_φ. In het bijzonder zal dan

$$|h_\varphi| = h_{|\varphi|} \tag{3.11}$$

BEWIJS:
Het bewijs zal voornamelijk gebaseerd zijn op gevolg 3.23, en de proposities 3.21 en 3.24.

Zij $\varphi, \psi \in M_*^+$. Dan zijn h_φ en h_ψ positief, zelftoegevoegd en τ-meetbaar, hun sterke som bestaat dus en is opnieuw een zelftoegevoegde positieve, τ-meetbare operator (cfr. Hoofdstuk 1). Uit de voorgaande propositie volgt dus dat deze som zal samenvallen met de som $h_\varphi \dot{+} h_\psi$. Bijgevolg kunnen we dus propositie 3.21 toepassen en verkrijgen we dat

$$h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi,$$

waarbij de som aan de rechterkant nu de som in $\tilde{N}$ voorstelt.

Analoog krijgen we voor elke $\varphi \in M_*^+$ en $x \in M$ dat

$$h_{x\,.\,\varphi\,.\,x^*} = x h_\varphi x^* \tag{3.12}$$

Bijgevolg kunnen we de volgende afbeelding:

$$\begin{array}{rcl} M_*^+ & \to & \{h \in \tilde{N}_+ \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s} h\} \\ \varphi & \mapsto & h_\varphi \end{array}$$

via lineariteit uitbreiden tot een afbeelding van M_* naar de deelruimte van $\tilde{N}$ die opgespannen wordt door

$$\{h \in \tilde{N}_+ \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s} h\}$$

zo verkrijgen we de volgende afbeelding:

$$\begin{array}{rcl} M_* & \to & \{h \in \tilde{N} \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s h = e^{-s} h\} \\ \varphi & \mapsto & h_\varphi \end{array}$$

Bovendien is het duidelijk dat de beeldruimte gesloten is voor $h \mapsto h^*$ en $h \mapsto |h|$.

Door lineariteit, zien we dat (3.10) geldt voor elke $\varphi \in M_*$. Zo geldt ook door de lineariteit (3.12) voor elke $\varphi \in M_*$ en $x \in M$, door polarizatie verkrijgen we dan (3.9) voor elke $\varphi \in M_*$ en $x, y \in M$.

In het bijzonder zal dan voor $\varphi = u|\varphi|$ als polaire decompositie van φ gelden dat

$$h_\varphi = h_{u|\varphi|} = u h_{|\varphi|}$$

dat deze relatie de polaire decomposite van h_φ voorstel volgt uit het feit dat de initiale projectie van de partiële isometrie u gelijk is aan $supp|\varphi| = supph_{|\varphi|}$.

Als laatste zal de afbeelding $\varphi \mapsto h_\varphi$ ook injectief zijn, want als $h_\varphi = 0$ dan zal $h_{|\varphi|} = |h_\varphi| = 0$, bijgevolg is dus $|\varphi| = 0$ en dus ook $\varphi = 0$. ■

3.5 De definitie en eigenschappen van $L^p(M)$

Steunend op stelling 3.25 krijgen we de volgende definitie: (Dit stemt overeen met het klassieke geval waar ook $L^1(X,\mu)$ isomorf is met de preduale van $L^\infty(X,\mu)$, waarbij we hier X als een σ-eindige verzameling beschouwen t.o.v. de maat μ op X).

Definitie 3.26 *$\forall p \in [1,+\infty]$ stellen we:*

$$L^p(M) = \{a \in \tilde{N} \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s a = e^{-s/p} a\}$$

We moeten hierbij wel opmerken dat de ruimten $L^p(M)$ lineaire deelruimten van $\tilde{N}$ zijn en dat ze lineair opgespannen kunnen worden door hun positief deel $L^p(M)_+ = L^p(M) \cap \tilde{N}_+$. Uit stelling 3.25 weten we al dat $L^1(M) \cong M_*$. Vervolgens krijgen we een aantal belangrijke stellingen, die we telkens kunnen vergelijken met de overeenkomstige stellingen, zoals we die uit de maattheorie voor de opbouw van de L^p-functieruimten kennen. Een eerste belangrijk resultaat daarin is de volgende propositie die weergeeft dat in de opbouw van de L^p-ruimten voor de von Neumann-algebra $M = L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ over $L^2(\mathbb{R},\mu)$, de verzameling $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ gelijk is aan de verzameling $L^\infty(M)$ die we via deze nieuwe opbouw verkrijgen.

Propositie 3.27 *We hebben dat voor de von Neumann-algebra M geldt:*

$$L^\infty(M) = M$$

Bewijs:
Omdat nu

$$M = \{y \in N \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s y = y\}$$

en

$$L^\infty(M) = \{y \in \tilde{N} \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s y = y\}$$

moeten we aantonen dat voor $a \in L^\infty(M)$ geldt dat die $a \in N$ en dus begrensd is.

Zij $a \in L^\infty(M)$, dan zal bovendien voor elke $s \in \mathbb{R}$, en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ het volgende gelden:

$$\begin{aligned} \tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) &= \tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(\theta_s|a|)) \\ &= \tau(\theta_s(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|))) \\ &= e^{-s}\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \end{aligned}$$

Bijgevolg moeten we voor elke $\lambda \in \mathbb{R}_+$ dus verkrijgen dat ofwel

$$\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) = 0$$

ofwel dat

$$\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) = \infty$$

Aangezien nu a echter τ-meetbaar is wil dat zeggen dat we voor een zekere λ verkrijgen dat $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) < +\infty$. Bijgevolg zal dus $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) = 0$ en dus zal ook $\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|) = 0$ zijn omdat τ trouw is. Dit wil dus zeggen dat de operator a begrensd is. ■

Merk op:
We hebben net gezien dat alle elementen van $L^\infty(M)$ begrensd zijn. In tegenstelling hiermee, zullen alle niet nulle elementen van $L^p(M)$, waarvoor $p < \infty$ onbegrensd zijn. Om dit aan te tonen nemen we $a \in L^p(M)$ met $a \neq 0$. Dan hebben we ook dat voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|) \neq 0$ en bijgevolg ook $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \neq 0$. Omdat dan $\forall s \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned}\tau(\chi_{]e^{s/p}\lambda,\infty[}(|a|)) &= \tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(e^{-s/p}|a|)) \\ &= \tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(\theta_s|a|)) \\ &= \tau(\theta_s\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \\ &= e^{-s}\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) \neq 0\end{aligned}$$

zal voor elke $\mu \in \mathbb{R}_+$ gelden dat

$$\tau(\chi_{]\mu,\infty[}(|a|)) \neq 0$$

en dus volgt er dat $|a|$ onbegrensd zal moeten zijn.

Het resultaat dat alle andere operatoren onbegrensd zullen zijn is op zich een vreemd resultaat. Want dit stemt niet overeen met onze intuïtie uit de Maattheorie, want daar kunnen begrensde functies evenzeer tot een L^p-ruimte behoren. Bijvoorbeeld de karakteristieke functie van een begrensd interval. Toch gaat dit geen contradictie vormen, dat zal later, op het einde van het hoofdstuk duidelijk worden, waar we dit specifieke geval behandeld zal worden.

Vervolgens komen we tot een propositie die ons in feite een alternatieve definitie voor de L^p-ruimte gaat geven. Deze definitie gaan we veel beter aanvoelen omdat ze past in het kader waarin ook hoofdstuk 2 en het klassieke geval opgebouwd werden.

Propositie 3.28 *Zij a een gesloten, dicht gedefinieerde operator, geaffilieerd aan N en met polaire decompositie $a = u|a|$. Neem $p \in [1, \infty[$. Dan zal*

$$a \in L^p(M) \Leftrightarrow u \in M \text{ en } |a|^p \in L^1(M)$$

Bewijs:
Merk op dat $a \in \tilde{N}$ als en slechts als $|a| \in \tilde{N}$ en $u \in N$ (zie propositie 1.50). Verder is ook $|a| \in \tilde{N}$ als en slechts als $|a|^p \in \tilde{N}$. Waarbij we de laatste equivalentie verkrijgen omdat $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(|a|)) = \tau(\chi_{]\lambda^p,\infty[}(|a|^p))$$

$\Rightarrow$ Voor $a \in L^p(M)$ en $s \in \mathbb{R}$ hebben we dan

$$\theta_s a = e^{-s/p}a$$

Omdat $a \in L^p(M)$ zal ook $|a| \in L^p(M)$ dat volgt uit de schrijwijze $|a| = (a^*a)^{1/2}$ en de multiplicativiteit van θ_s namelijk:

$$\begin{aligned}\theta_s(|a|) &= \theta_s((a^*a)^{1/2}) \\ &= (\theta_s(a^*a))^{1/2} \\ &= (\theta_s(a^*)\,\theta_s(a))^{1/2} \\ &= ((\theta_s(a))^*\theta_s(a))^{1/2} \\ &= (e^{-s/p}a^*e^{-s/p}a)^{1/2} \\ &= e^{-s/p}(a^*a)^{1/2} = e^{-s/p}|a|\end{aligned}$$

Dat levert ons dan twee verschillende uitkomsten voor $\theta_s(a)$ namelijk

$$\begin{aligned}\theta_s(a) &= \theta_s(u|a|)\\ &= \theta_s(u)\,.\theta_s(|a|)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\theta_s(a) &= e^{-s/p}a\\ &= e^{-s/p}\,u|a|\\ &= u\,e^{-s/p}|a|\\ &= u\,\theta_s(|a|)\end{aligned}$$

Hieruit volgt al dat $\theta_s(u) = u$, dus moet $u \in M$. En we hebben ook $|a|^p \in L^1(M)$ want:

$$\begin{aligned}\theta_s(|a|^p) &= (\theta_s(|a|))^p\\ &= \left(e^{-s/p}\,|a|\right)^p\\ &= e^{-s}\,|a|^p\end{aligned}$$

Dit toont ons dus de pijl naar rechts aan.

$\Leftarrow$ We weten nu dat

$$u \in M \; en \; |a|^p \in L^1(M)$$

Gebruikmakend van de multiplicativiteit van θ_s komen we tot het resultaat:

$$\begin{aligned}\theta_s(a) = \theta_s(u|a|) &= \theta_s(u)\,\theta_s(|a|)\\ &= u\,(\theta_s(|a|^p))^{1/p}\\ &= u\,(e^{-s}\,|a|^p)^{1/p}\\ &= u\,e^{-s/p}\,|a|\\ &= e^{-s/p}\,u|a| = e^{-s/p}a\end{aligned}$$

We hebben dus $\theta_s(a) = e^{-s/p}\,a$ en wegens de definitie zal dus $a \in L^p(M)$. ■

Waarom is deze laatste definitie misschien handiger om mee te werken? Omdat een element $a \in L^p(M)$ nu op een bepaalde wijze met een element uit $L^1(M)$ gelinkt is, wanneer we dan een norm op $L^1(M)$ definiëren, kunnen we via het bovenstaande verband, deze norm mooi overbrengen naar de $L^p(M)$ ruimte (voor $p > 1$), deze techniek hebben we ook in het verleden (cfr hoofdstuk 2, en het klassieke geval) al gebruikt. Deze opbouw, om van de norm op $L^1(M)$ tot een norm op $L^p(M)$ te komen is dan ook het onderdeel van de volgende paragraaf.

3.6 De norm op $L^p(M)$

3.6.1 Definitie van de norm op $L^p(M)$

We beginnen hier met een norm op $L^1(M)$ te definiëren.

Definitie 3.29 *Omdat $L^1(M) \cong M_*$ kunnen we de volgende lineaire functionaal $tr(\,.\,)$ op $L^1(M)$ als volgt definiëren:*

$$tr(h_\varphi) = \varphi(1),\ \varphi \in M_*$$

Merk op dat

$$tr(|h_\varphi|) = tr(h_{|\varphi|}) = |\varphi|(1) = \|\varphi\|$$

en dit voor elke $\varphi \in M_*$. Dat impliceert bovendien dat

$$|tr(a)| \leq tr(|a|)$$

voor elke $a \in L^1(M)$ en dat de afbeelding

$$\begin{array}{rcl} L^1(M) & \to & [0, +\infty[\\ a & \mapsto & tr(|a|) \end{array}$$

een norm definieert op $L^1(M)$. Noteer deze afbeelding met $\|\,.\,\|_1$.

Merk op: Dat de keuze van $tr(\,.\,)$ als naam van de afbeelding toch heel suggestief is voor de naam "trace". In dit verband is het nuttig te verwijzen naar een latere propositie namelijk propositie 3.39, waar we de keuze van deze naam gerechtvaardigd zien.

Definitie 3.30 *i. Zij $p \in [1, +\infty[$. Dan definiëren we $\|\,.\,\|_p$ op $L^p(M)$ door middel van*

$$\|a\|_p = tr(|a|^p)^{1/p} = \left(\| \, |a|^p \|_1\right)^{1/p}$$

voor $a \in L^p(M)$.

ii. Voor $p = +\infty$ stellen we dan

$$\|a\|_\infty = \|a\|$$

voor $a \in L^\infty(M)$

We gaan vervolgens aantonen dat voor elke p, $\|\,.\,\|_p$ een norm op $L^p(M)$ gaat definiëren. d.w.z. dat we de volgende drie eisen moeten nagaan: $\forall x \in L^p(M)$

1. $\|x\|_p \geq 0$ en $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda\, x\|_p = |\lambda|\, \|x\|_p$ voor $\lambda \geq 0$
3. $\|x + y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$

Propositie 3.31 *De afbeelding*

$$\begin{array}{rcl} M_* & \to & L^1(M) \\ \varphi & \mapsto & h_\varphi \end{array}$$

is een isometrie van M_* naar $L^1(M)$.

BEWIJS:
Dit volgt door het samenstellen van stelling 3.25, definitie 3.29 en de opmerking die na definitie 3.26 gegeven werd. ■

Uit de definitie van $\|\,.\,\|_1$ op $L^1(M)$ volgt onmiddellijk dat dit een norm definieert, voor $\|\,.\,\|_p$ op $L^p(M)$ is dat niet onmiddellijk duidelijk, enkel de driehoeksongelijkheid levert nog belangrijke problemen. In de rest van deze paragraaf gaan we dan ook het volgende proberen aan te tonen voor $a, b \in L^p(M)$:

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

dit gaan we doen, zoals we al in hoofdstuk 2 aangekondigd hadden met behulp van het drie lijnen theorema.

Eerst krijgen we echter nog een paragraafje dat het verband zal geven tussen de topologie op $\tilde{N}$ en de normtopologie op de $L^p(M)$-ruimten:

3.6.2 De spoortopologie van $\tilde{N}$ op $L^p(M)$.

We brengen even in herinnering dat de topologie op $\tilde{N}$ bepaald wordt door de verzamelingen $N(\epsilon,\delta)$ $(\forall \epsilon,\delta > 0)$ die een basis van omgevingen van 0 vormen. (cfr propositie 1.56 en definitie 1.54). Bovendien is $N(\epsilon,\delta)$ dan van de volgende vorm:

$$N(\epsilon,\delta) = \{a \in \tilde{N} \,|\, \tau(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|)) \leq \delta\}$$

Lemma 3.32 *Zij $p \in [1,+\infty[$ en $\epsilon,\delta \in \mathbb{R}_+$. Dan zal:*

$$N(\epsilon,\delta) \cap L^p(M) = \{a \in L^p(M) \,|\, \|a\|_p \leq \epsilon\delta^{1/p}\}$$

BEWIJS:
Zij $a \in L^p(M)$. Dan zal $|a|^p \in L^1(M)_+$ en bijgevolg zal $|a|^p = h_\varphi$ voor een zekere $\varphi \in M_*^+$. Bovendien hebben we ook dat

$$\begin{aligned}
\tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) &= \tau(\chi_{]\epsilon^p,\infty[}(|a|^p)) \\
&= \frac{1}{\epsilon^p}\varphi(1) \\
&= \frac{1}{\epsilon^p}\|\,|a|^p\|_1 \\
&= \frac{1}{\epsilon^p}\|a\|_p^p
\end{aligned}$$

Wanneer we dat gebruiken verkrijgen we dat:

$$\begin{aligned}
a \in N(\epsilon,\delta) &\Leftrightarrow |a| \in N(\epsilon,\delta) \\
&\Leftrightarrow \tau(\chi_{]\epsilon,\infty[}(|a|)) \leq \delta \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon^p}\|a\|_p^p \leq \delta \\
&\Leftrightarrow \|a\|_p \leq \epsilon\delta^{1/p}.
\end{aligned}$$

■

Gevolg 3.33 *Op $L^1(M)$ is de normtopologie precies gelijk aan de spoortopologie die $L^1(M)$ als deelruimte van $\tilde{N}$ meekrijgt.*

Merk op dat dit bovenstaande gevolg ook voor de ruimten $L^p(M)$ zal gelden wanneer we weten dat $\|\,.\|_p$ een norm definieert.

3.6.3 De Hölder-ongelijkheid

Vooraleer we de Hölder en de Minkowski ongelijkheid kunnen aantonen, moeten we eerst nog een aantal technische lemma's passeren. Noteren we hierbij met $\mathbb{C}_+$ het gesloten halfvlak $\{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, Re(\alpha) \geq 0\}$ en met $\mathbb{C}_+^0$ het corresponderende open halfvlak $\{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, Re(\alpha) > 0\}$.

Lemma 3.34 *Zij $\alpha_0 \in \mathbb{C}_+^0$ dan zal de volgende functie*

$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - \lambda^{\alpha_0} log\lambda$$

voor $\alpha \to \alpha_0$ naar 0 streven en dit uniform in $\lambda \in]0, M]$ met $M > 0$.

Bewijs:
Eerst en vooral gaan we bovenstaande vergelijking eenvoudiger proberen te formuleren. Definieer daarvoor de functie

$$F(t) = f((1-t)\alpha_0 + t\alpha)$$

waarbij $f(\alpha) = \lambda^\alpha$ en $t \in [0, 1]$, dan bestaat er dus een $c \in [0, 1]$ zodanig dat

$$F(1) - F(0) = F'(c)$$

en dat stemt overeen met

$$f(\alpha) - f(\alpha_0) = f'((1-c)\alpha_0 + c\alpha)\,(\alpha - \alpha_0)$$

Stel dan γ gelijk aan $(1-c)\alpha_0 + c\alpha$ merk dan nog op dat γ in feite tussen α_0 en α ligt en dat γ bovendien afhankelijk van λ is. Dat levert ons in termen van de oorspronkelijke vergelijking dat

$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} = \lambda^\gamma log\lambda$$

In het bijzonder verkrijgen we dan hetvolgende:

$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - \lambda^{\alpha_0} log\lambda = \lambda^\gamma log\lambda - \lambda^{\alpha_0} log\lambda$$

We hebben dus een sterke vereenvoudiging van de eerste afschatting, en we moeten in feite dus aantonen dat

$$|\lambda^\gamma log\lambda - \lambda^{\alpha_0} log\lambda| \to 0$$

voor $\alpha \to \alpha_0$ en dit uniform voor $\lambda \in]0, M]$. Wanneer we dat concreet uitschrijven in termen van quantoren moeten we dus bewijzen dat $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ zodat $\forall \gamma \in \mathbb{C}$ en $\forall \lambda \in]0, M]$ met $|\gamma - \alpha_0| < \delta$ dat er dan volgt dat

$$|\lambda^\gamma log\lambda - \lambda^{\alpha_0} log\lambda| < \epsilon$$

Neem nu $\beta = 1/2\, Re\alpha_0$ omdat in het bijzonder dan $Re(\alpha_0) > 0$ verkrijgen we dan:

$$|\lambda^\gamma\, log\lambda - \lambda^{\alpha_0}\, log\lambda| = |\lambda^\beta\, log\lambda|\ |\lambda^{\gamma-\beta} - \lambda^{\alpha_0-\beta}|$$

waarbij dan de term $|\lambda^\beta\, log\lambda|$ begrensd zal zijn omdat $\beta > 0$. We krijgen dus nogmaals een vereenvoudiging en er rest ons enkel aan te tonen dat

$$\sup_{\lambda\in]0,M]} |\lambda^{\alpha'} - \lambda^{\alpha'_0}| \to 0$$

voor $\alpha' \to \alpha'_0$ Dit zal gelijk zijn aan aantonen dat

$$\sup_{\lambda\in[0,M]} |\lambda^{\alpha'} - \lambda^{\alpha'_0}| \to 0$$

voor $\alpha' \to \alpha'_0$ Deze laatste functie is nu continu op een compactum, bijgevolg bereikt deze functie haar maximum, en dat zal naar 0 streven voor $\alpha' \to \alpha'_0$ ■

Lemma 3.35 *Zij $h \in \tilde{N}_+$. Dan zal de afbeelding*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^0_+ & \to & \tilde{N} \\ \alpha & \mapsto & h^\alpha \end{array}$$

differentieerbaar zijn t.o.v. de topologie op $\tilde{N}$.

Bewijs:
Merk eerst en vooral op dat h^α voor $\alpha \in \mathbb{C}^0_+$ τ-meetbaar is omdat h τ-meetbaar is.

i. Veronderstel dat h begrensd is, d.w.z. $h \in N_+$. Dan zal de afbeelding

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^0_+ & \to & N \\ \alpha & \mapsto & h^\alpha \end{array}$$

differentieerbaar zijn ten opzichte van de normtopologie op N en in het bijzonder zal dan

$$\frac{d}{d\alpha} h^\alpha = h^\alpha\, log(h)$$

(Uit de operatorentheorie volgt dan dat de afbeelding aan de rechterkant van het gelijkheidsteken goed gedefinieerd is voor een willekeurige positieve $h \in N$ omdat de afbeelding $\lambda \mapsto \lambda^\alpha\, log(\lambda)$ continu is op $\mathbb{R}_+$.) De vergelijking volgt uit de spectraaltheorie en gebruikmakend van het feit dat voor elke $\alpha_0 \in \mathbb{C}^0_+$ geldt dat

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_0}(\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha_0} log\lambda) = \frac{1}{\alpha - \alpha_0}(e^{\alpha\, log\lambda} - e^{\alpha_0\, log\lambda}) - log\lambda\, e^{\alpha_0\, log\lambda}$$

uniform in $\lambda \in]0, \|h\|]$ naar 0 zal streven voor $\alpha \to \alpha_0$.

ii. Neem dan nu h als element uit $\tilde{N}_+$. Dan beweren we dat

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^0_+ & \to & \tilde{N} \\ \alpha & \mapsto & h^\alpha \end{array}$$

differentieerbaar is ten opzichte van de topologie op $\tilde{N}$. En dat de afgeleide nog steeds gegeven wordt door de formule hierboven. Analoog als hierboven zal $h^\alpha \, logh$ een goed gedefinieerde, zelftoegevoegde positieve operator vormen, die bovendien nog τ-meetbaar is ook (want h^α en $logh$ zijn τ-meetbaar, bijgevolg ook hun produkt). Neem nu $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$ en neem $\lambda \in \mathbb{R}_+$ zodanig dat $\tau(\chi_{]\lambda,\infty[}(h)) \leq \delta$. Stel dan $p = \chi_{[0,\lambda]}(h)$. Dan zal hp begrensd zijn en uit het voorgaande deel van het bewijs volgt dan dat voor elke $\alpha \in \mathbb{C}^0_+$ dicht genoeg bij α_0 zal gelden dat:

$$\left\| \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_0}(h^\alpha - h^{\alpha_0}) - h^{\alpha_0} \, logh \right) p \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left((hp)^\alpha - (hp)^{\alpha_0} \right) - (hp)^\alpha log(hp) \right\| \leq \epsilon$$

Bijgevolg is dus

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_0}(h^\alpha - h^{\alpha_0}) - h^{\alpha_0} logh \ \in \ N(\epsilon, \delta)$$

en dit voor α dicht genoeg tegen α_0. ■

Noteren we met S de gesloten complexe strip $\{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \ Re\, \alpha \ \leq 1\}$ en met S^0 noteren we dan de overeenkomstige open strip $\{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \ Re\, \alpha \ < 1\}$.

Uit het volgende lemma valt al duidelijk op te merken dat we naar de Hölder ongelijkheid aan het toewerken zijn.

Lemma 3.36 *Zij $h, k \in L^1(M)_+$. Dan zal voor elke $\alpha \in S^0$*

$$h^\alpha k^{1-\alpha} \in L^1(M)$$

en de volgende afbeelding zal analytisch zijn.

$$\begin{array}{rcl} S^0 & \rightarrow & L^1(M) \\ \alpha & \mapsto & h^\alpha k^{1-\alpha} \end{array}$$

Bewijs:
Dat $h^\alpha k^{1-\alpha} \in L^1(M)$ volgt uit definitie 3.26 aangezien:

$$\begin{array}{rcl} \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s(h^\alpha k^{1-\alpha}) & = & (\theta_s h)^\alpha (\theta_s k)^{1-\alpha} \\ & = & e^{-\alpha s} h^\alpha e^{-(1-\alpha)s} k^{1-\alpha} \\ & = & e^{-s} h^\alpha k^{1-\alpha} \end{array}$$

We willen nu aantonen dat de afbeelding zoals gegeven in de formulering van de stelling differentieerbaar is, gebruikmakend van gevolg 3.33 kunnen we evenzeer aantonen dat deze afbeelding als een afbeelding in $\tilde{N}$ differentieerbaar is. Dit omdat de normtopologie op $L^1(M)$ samenvalt met de spoortopologie die $L^1(M)$ als deelruimte van $\tilde{N}$ meekrijgt.

Uit het voorgaande lemma volgt dat de functies $f, g : S^0 \rightarrow \tilde{N}$ gedefinieerd door $f(\alpha) = h^\alpha$ en $g(\alpha) = k^{1-\alpha}$ differentieerbaar zijn, bijgevolg verkrijgen we voor elke $\alpha_0 \in S^0$ dat

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_0}(f(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha_0)g(\alpha_0))$$

$$= \frac{1}{\alpha-\alpha_0} f(\alpha)(g(\alpha)-g(\alpha_0)) + \frac{1}{\alpha-\alpha_0}(f(\alpha)-f(\alpha_0))g(\alpha_0)$$
$$\rightarrow f(\alpha_0)g'(\alpha_0) + f'(\alpha_0)g(\alpha_0) \text{ voor } \alpha \rightarrow \alpha_0$$

Daaruit volgt dat dus ook $fg : S^0 \rightarrow \tilde{N}$ differentieerbaar is. ■

Lemma 3.37 *Zij $t \in \mathbb{R}$ en stel*

$$\tilde{N}_{\frac{1}{2}+it} = \{a \in \tilde{N} \mid \forall s \in \mathbb{R} : \theta_s a = e^{-(\frac{1}{2}+it)s} a\}$$

Zij dan $a, b \in \tilde{N}_{\frac{1}{2}+it}$. Dan zal b^*a, $ab^* \in L^1(M)$ en dan zal

$$tr(b^*a) = tr(ab^*)$$

Bewijs:
$b^*a \in L^1(M)$ want

$$\begin{aligned} \theta_s(b^*a) &= \theta_s b^* \theta_s a \\ &= \theta_s(b)^* \theta_s a \\ &= e^{(-1/2+it)s} b^* e^{(-1/2-it)s} a \\ &= e^{-s} a \end{aligned}$$

We kunnen dit volledig analoog voor ab^* aantonen.

- we tonen dit eerst aan voor het geval dat $a = b$. Uit definitie 3.29 en lemma 3.22 verkrijgen we dan dat:

$$\begin{aligned} tr(a^*a) &= \tau(\chi_{]1,\infty[}(a^*a)) \\ &= \tau(\chi_{]1,\infty[}(aa^*)) \\ &= tr(aa^*) \end{aligned}$$

  In deze vergelijkingen hierboven zit er echter nog een stap die nadere toelichting vraagt, want de gelijkheid

$$\tau(\chi_{]1,\infty[}(a^*a)) = \tau(\chi_{]1,\infty[}(aa^*))$$

  is niet triviaal. We gebruiken hierbij de polaire decompositie van de operator a en a^*, zoals vermeld in paragraaf 1.2.4, d.w.z. van de volgende vorm

$$a = u\,|a| \;\; en \;\; a^* = u^*|a^*|$$

  met

$$|a| = (a^*a)^{1/2} \;\; en \;\; |a^*| = (u\,|a|\,u^*)$$

  Zo verkrijgen we dus dat

$$\begin{aligned} aa^* &= u|a|\,|a|^* = u|a|^2u^* \\ a^*a &= |a|u^*u|a| = |a|^2 \end{aligned}$$

Zo verkrijgen we dus de volgende gelijkheid:

$$\chi_{]\epsilon,+\infty[}(a^*a) = u^*\chi_{]\epsilon,+\infty[}(aa^*)u$$

Dat we de unitaire operator door de spectrale projecties mogen schuiven wordt op een volledig identieke wijze aangetoond zoals in de opmerkingen na stelling 3.18. In het bijzonder levert dit, omdat τ een spoor definieert, het gevraagde namelijk:

$$\begin{aligned}\tau(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(a^*a)) &= \tau(u^*\chi_{]\epsilon,+\infty[}(aa^*)u) \\ &= \tau(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(aa^*))\end{aligned}$$

- Voor het meer algemene geval waarin $a \neq b$, merken we op dat $a + ib \in \tilde{N}_{\frac{1}{2}+it}$ en gebruikmakend van de volgende polarizatie technieken:

$$b^*a = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(a + i^k b)^*(a + i^k b)$$

$$ab^* = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(a + i^k b)(a + i^k b)^*$$

het vorige puntje en het feit dat $tr(\,.\,)$ lineair is verkrijgen we het gevraagde. ■

Vooraleer we de volgende propositie aantonen vermelden we eerst de identiteitsstelling uit de complexe analyse:

Stelling 3.38 (Identiteitsstelling) *Stel W een open en samenhangend deel van $\mathbb{C}$, stel $S \subseteq W$ en veronderstel dat S een ophopingspunt heeft in W. Stel f, g twee functies die beiden analytisch zijn op W, zodat $f(z) = g(z)\ \forall z \in S$. Dan volgt hieruit dat $f = g$ op gans W.*

Propositie 3.39 *Zij $p, q \in [1, \infty]$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neem dan $a \in L^p(M)$ en $b \in L^q(M)$. Dan zal $ab, ba \in L^1(M)$ en*

$$tr(ab) = tr(ba)$$

Bewijs:
Weer moeten we verschillende gevallen onderscheiden in dit bewijs:

- Neem $p = 1$ en $q = +\infty$ Dan zal $a = h_\varphi$ voor een zekere $\varphi \in M_*$ het resultaat volgt dan gebruikmakend van stelling 3.25

$$\begin{aligned}tr(h_\varphi b) &= tr(h_{\varphi\,.\,b}) = (\varphi\,.\,b)(1) = \varphi(b1) \\ &= \varphi(1b) = (b\,.\,\varphi)(1) = tr(h_{b\,.\,\varphi}) = tr(bh_\varphi)\end{aligned}$$

- Neem nu p en q toegevoegd uit $]1, +\infty[$. Volledig analoog zoals in de bewijzen hierboven kunnen we aantonen dat $ab, ba \in L^1(M)$. Omdat $L^p(M)$ en $L^q(M)$ d.m.v. lineariteit opgespannen worden door hun positief deel, mogen we aannemen dat $a \in L^p(M)_+$ en $b \in L^q(M)_+$. Dan zullen $a^p, b^q \in L^1(M)_+$. Uit lemma

3.36, en omdat $tr(\,.\,)$ lineair en continu is, volgt er dan dat de functies F en G op S^0 gedefinieerd door:

$$F(\alpha) = tr\left(a^{p\alpha}b^{q(1-\alpha)}\right)$$

$$G(\alpha) = tr\left(b^{q(1-\alpha)}a^{p\alpha}\right)$$

analytisch zullen zijn. Voor elke $t \in \mathbb{R}$ verkrijgen we dat

$$a^{p(\frac{1}{2}+it)}, b^{q\frac{1}{2}+it} \in \tilde{N}_{\frac{1}{2}+it}$$

zodat uit lemma 3.37 volgt dat

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{2}+it) &= tr\left(a^{p(\frac{1}{2}+it)}b^{q(\frac{1}{2}-it)}\right) \\ &= tr\left(a^{p(\frac{1}{2}+it)}(b^{q(\frac{1}{2}+it)})^*\right) \\ &= tr\left((b^{q(\frac{1}{2}+it)})^*a^{p(\frac{1}{2}+it)}\right) \\ &= tr\left(b^{q(\frac{1}{2}-it)}a^{p(\frac{1}{2}+it)}\right) \\ &= G(\frac{1}{2}+it) \end{aligned}$$

Gebruikmakend van de identiteitsstelling uit de complexe analyse (3.38) kunnen we besluiten dat $F = G$ op gans S^0, in het bijzonder zal dus

$$tr(ab) = F(1/p) = G(1/p) = tr(ba)$$

■

Het bewijs van het volgende lemma is gebaseerd op het drie lijnen theorema voor analytische functies. Dit theorema blijft ook gelden voor analytische functies F met waarden in een Banachruimte. (voor meer info over het verband tussen deze twee verschillende soorten analytische functies: [5]).

Stelling 3.40 (3-lijnen theorema) *Zij*

$$\Omega = \{x + iy \ : \ a < x < b\}$$

en

$$\overline{\Omega} = \{x + iy \ : \ a \leq x \leq b\}$$

met f als functie continu op $\overline{\Omega}$ en $f \in H(\Omega)$ en stel $|f(z)| < B$ voor elke z in Ω en een vaste $B < +\infty$.

Stel dan voor $\{a \leq x \leq b\}$

$$M(x) = \sup\left\{|f(x+iy)| \,\middle|\, -\infty < y < +\infty\right\}$$

Dan zal voor $(a < x < b)$

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}$$

Nu komen we tot het meest essentiële stuk in deze paragraaf, gebruikmakend van het drie lijnen theorema, volgen zeer snel de Hölder en de Minkowski-ongelijkheid.

Lemma 3.41 *Zij $h, k \in L^1(M)_+$ en veronderstel dat $\|h\|_1 = \|k\|_1 = 1$. Dan verkrijgen we voor elke $\alpha \in S^0$ hetvolgende:*

$$\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq 1$$

Bewijs:
Stel $s = Re\,\alpha$ en $t = Im\,\alpha$. Dan zal $h^s \in L^{1/s}(M)$ met bovendien $\|h^s\|_{1/s} = 1 = s^{-s}\,.\,s^s$
Uit lemma 3.32 volgt dan dat

$$h^s \in N(s^{-s}, s)$$

Analoog verkrijgen we:

$$k^{1-s} \in N((1-s)^{-(1-s)}, 1-s)$$

Er volgt dan

$$\begin{array}{rcl} h^s k^{1-s} & \in & N(s^{-s}, s)\,.\,N((1-s)^{-(1-s)}, 1-s) \\ & \subseteq & N(s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}, s + (1-s)) \end{array}$$

Bijgevolg zal ook:

$$\begin{array}{rcl} h^\alpha k^{1-\alpha} & = & h^{it} h^s k^{1-s} k^{-it} \\ & \in & N(s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}, 1) \end{array}$$

Lemma 3.32 levert ons dan dat

$$\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}$$

Omdat nu de functie $s \mapsto s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}$ begrensd is zal de functie:

$$\begin{array}{rcl} S^0 & \to & L^1(M) \\ \alpha & \mapsto & h^\alpha k^{1-\alpha} \end{array}$$

begrensd zijn, omdat de functie daar bovendien analytisch is kunnen we het drie lijnen theorema toepassen op elke gesloten strip

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \,|\, \epsilon \leq Re(\alpha) \leq 1 - \epsilon\}$$

met $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Dan verkrijgen we :

$$\sup_{\epsilon \leq Re(\alpha) \leq 1-\epsilon} \|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq \epsilon^{-\epsilon}(1-\epsilon)^{-(1-\epsilon)}$$

Voor een vaste $\alpha \in S^0$ krijgen we dan voor elke $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ met $\epsilon \leq Re(\alpha) \leq 1 - \epsilon$ dan de ongelijkheid:

$$\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq \epsilon^{-\epsilon}(1-\epsilon)^{-(1-\epsilon)}$$

Omdat nu voor $\epsilon \to 0$

$$\epsilon^{-\epsilon}(1-\epsilon)^{-(1-\epsilon)} = e^{-\epsilon log \epsilon}\, e^{-(1-\epsilon)log(1-\epsilon)} \to 1$$

zal dus

$$\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq 1$$

Dit bewijst het lemma. ■

Vooraleer we de Hölder-ongelijkheid aantonen vermelden we nog een zeer kort technisch lemma:

Lemma 3.42 *Zij $a \in L^p(M)$ met $\|a\|_p = 1$ dan zal ook $\|a^*\|_p = 1$*

Bewijs:
We beschouwen de polaire decompositie $a = u|a|$ van de operator a, dan krijgen we voor de operator a^* de volgende polaire decompositie $a^* = u^*|a^*|$ waarbij dan $|a|^* = (u|a|u^*)$ (cfr. paragraaf 1.2.4). Omdat nu

$$\| \, |a|^p \, \|_1 = \|a\|_p = 1$$

verkrijgen we gebruikmakend van propositie 3.39 hetvolgende:

$$\begin{aligned} \|a^*\|_p &= \| \, |a^*|^p \|_1 \\ &= \| \, u^p \, |a|^p \, (u^*)^p \, \|_1 \\ &= \| \, |a|^p \, \|_1 = 1 \end{aligned}$$

■

Stelling 3.43 (De Hölder ongelijkheid) *Zij $p, q \in [1, +\infty]$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zij $a \in L^p(M)$ en $b \in L^q(M)$. Dan zal:*

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

Bewijs:
We splitsen het bewijs op naargelang de waarde van p.

- $\mathbf{p = 1}$
  Als $p = 1$ dan zal $a = h_\varphi$ voor een zekere $\varphi \in M_*$

  $$\begin{aligned} \|h_\varphi b\|_1 &= \|h_{\varphi \, . \, b}\|_1 = \|\varphi \, . \, b\| \\ &\leq \|\varphi\| \, \|b\|_\infty = \|h_\varphi\|_1 \, . \, \|b\|_\infty \end{aligned}$$

  en dit voor elke $b \in L^\infty(M) = M$. Het geval voor $q = 1$ verloopt analoog.

- $\mathbf{p, q} \in]\mathbf{1}, +\infty[$ en $\|a\|_p = 1, \|b\|_q = 1$.
  Beschouw dan $a = u|a|$ als de linkse polaire decompositie van a en $b = |b^*|v$ als de rechtse polaire decompositie van b. Dan zal $|a|^p, |b^*|^q \in L^1(M)$ met $\| \, |a|^p \|_1 = \| \, |b^*|^q \|_1 = 1$ en passen we dan lemma 3.41 toe, dan verkrijgen we dat:

  $$\begin{aligned} \|ab\|_1 &= \|u|a| \, |b^*|v\|_1 \\ &\leq \| \, |a| \, |b^*| \, \|_1 \\ &= \| \, |a|^{p/p} \, |b^*|^{q/q} \|_1 \leq 1 \end{aligned}$$

  En daaruit volgt het gevraagde door dit voor een willekeurige a op $a/\|a\|_p$ toe te passen. ■

In de volgende propositie, krijgen we een nieuwe alternatieve definitie van de norm, uit deze vorm zal zeer de driehoeksongelijkheid afgeleid kunnen worden.

3.6.4 De Minkowski-ongelijkheid

Propositie 3.44 *Zij $p, q \in [1, \infty]$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Zij $a \in L^p(M)$ Dan zal*

$$\|a\|_p = \sup\left\{ |tr(ab)| \,\middle|\, b \in L^q(M), \|b\|_q \leq 1 \right\}$$

Bewijs:
Voor $p = 1$ of $p = \infty$ is dit een onmiddellijk gevolg van het feit dat $tr(ch_\varphi) = tr(h_\varphi\, c) = tr(h_{\varphi\, c}) = \varphi(c)$ en dit voor elke $\varphi \in M_*$ en $c \in M$.

Veronderstellen we nu echter dat $1 < p < \infty$. We kunnen weer enkel het geval voor $\|a\|_p = 1$ behandelen, want de rest zal daar uit volgen. Beschouw $a = u|a|$ als polaire decompositie van a en stel dan $b = |a|^{p/q} u^*$. Dan verkrijgen we dat $b \in L^q(M)$ met

$$\|b\|_q = \| \, |a|^{p/q} u^* \|_q = tr(|a|^p)^{1/q} = 1$$

en

$$tr(ab) = tr(u|a| \, |a|^{p/q} u^*) = tr(|a|^p) = 1$$

bijgevolg zal dan ook

$$\|a\|_p = 1 \leq \sup\{ |tr(ab)| \, | b \in L^q(M), \|b\|_q \leq 1 \}$$

De omgekeerde ongelijkheid volgt door gebruik te maken van de ongelijkheid van Hölder:

$$\begin{aligned}
& \sup\{ \, |tr(ab)| \, | \, b \in L^q(M), \, \|b\|_q \leq 1 \} \\
\leq \; & \sup\{ tr(|ab|) \, | \, b \in L^q(M), \, \|b\|_q \leq 1 \} \\
= \; & \sup\{ \, \|ab\|_1 \, | \, b \in L^q(M), \, \|b\|_q \leq 1 \} \\
\leq \; & \sup\{ \, \|a\|_p \, . \, \|b\|_q \, | \, b \in L^q(M), \, \|b\|_q \leq 1 \} \\
= \; & \|a\|_p
\end{aligned}$$

■

Gevolg 3.45 *$\| \, . \, \|_p$ definieert een norm op $L^p(M)$.*

Bewijs:
De Minkowski ongelijkheid volgt gebruikmakend van de vorige propositie want:

$$\begin{aligned}
\|a + b\|_p \; = \; & \sup\{ \, |tr((a+b)c)| \, | \, c \in L^q(M), \, \|c\|_q \leq 1 \} \\
\leq \; & \sup\{ \, |tr(ac)| + |tr(bc)| \, | \, c \in L^q(M), \, \|c\|_q \leq 1 \} \\
\leq \; & \sup\{ \, |tr(ac)| \, | \, c \in L^q(M), \, \|c\|_q \leq 1 \} \\
& \quad + \sup\{ \, |tr(bc)| \, | \, c \in L^q(M), \, \|c\|_q \leq 1 \} \\
= \; & \|a\|_p + \|b\|_q
\end{aligned}$$

■

3.7 $(L^p(M), \|\,.\,\|_p)$ definieert een Banachruimte

Propositie 3.46 *Op $L^p(M)$ is de normtopologie precies de spoortopologie die $L^p(M)$ als deelruimte van de topologische vectorruimte $\tilde{N}$ meekrijgt.*

Bewijs:
Omdat nu we weten dat $\|\,.\,\|_p$ een norm op $L^p(M)$ definieert is dat een gevolg van lemma 3.32. ■

Omdat we deze zeer specifieke opbouw gevolgd hebben gaat er zeer snel volgen dat deze ruimte een Banachruimte vormt, we moeten de volledigheid dus helemaal niet gaan aantonen, dat gaat mooi passen in deze opbouw.

Gevolg 3.47 *$(L^p(M), \|\,.\,\|_p)$ vormt een banachruimte.*

Bewijs:
Uit de definitie van $L^p(M)$ volgt dat dit een gesloten deelruimte van de topologische volledige vectorruimte $\tilde{N}$ gaat vormen (cfr theorema 1.57). Bijgevolg zal $L^p(M)$ dus als gesloten deelruimte ook volledig zijn voor de spoortopologie van $\tilde{N}$. Uit het voorgaande vormt nu echter dat deze topologie precies gelijk is aan de topologie die door de norm $\|\,.\,\|_p$ wordt voortgebracht. Bijgevolg is $L^p(M)$ dus gesloten voor de normtopologie. $(L^p(M), \|\,.\,\|_p)$ vormt dus een Banachruimte. ■

3.8 De constructie is onafhankelijk van het gekozen gewicht.

Dit stukje is zeer belangrijk omdat we in deze paragraaf gaan aantonen dat de gevonden ruimte: $(L^p(M), \|\,.\,\|_p)$ onafhankelijk van het gekozen gewicht φ_0, waarmee we vertrokken zijn, is. Dit is niet onmiddellijkk duidelijk natuurlijk omdat de ruimten, gedefinieerd werden in termen van $\tilde{N}, (\theta_s)_s$ en τ.

In de volgende subsecties stellen we met φ_0 en φ_1 twee normale trouwe en semieindige gewichten op M voor. De bijhorende gekruiste produkten noteren we met $N_0 = R(M, \sigma^{\varphi_0})$ en $N_1 = R(M, \sigma^{\varphi_1})$. Die gekruiste produkten worden voortgebracht door de volgende generatoren, voor $N_0 = R(M, \sigma^{\varphi_0})$ zijn dat $\pi_0(x)$ voor $x \in M$ en $\lambda(s)$ met $s \in \mathbb{R}$. Met als akties:

$$\begin{aligned}(\pi_0(x)\xi)(t) &= \sigma_{-t}^{\varphi_0}(x)\xi(t)\\ (\lambda(s)\xi)(t) &= \xi(t-s)\end{aligned}$$

voor $N_1 = R(M, \sigma^{\varphi_1})$ zijn dit $\pi_1(x)$ voor $x \in M$ en $\lambda(s)$ met $s \in \mathbb{R}$. Met als akties:

$$\begin{aligned}(\pi_1(x)\xi)(t) &= \sigma_{-t}^{\varphi_1}(x)\xi(t)\\ (\lambda(s)\xi)(t) &= \xi(t-s)\end{aligned}$$

In beide bovenstaande gevallen komt t uit $\mathbb{R}$ en is ξ een element uit de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$.

3.8.1 Een isomorfisme tussen N_0 en N_1.

Noteren we met θ de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N_0 en $N1$. θ wordt op N_0 en N_1 op een volledig identieke manier gedefinieerd, dat volgt uit de definitie die we hieronder nog kort even vermelden:

$$x \mapsto \begin{cases} \theta_s x = x & \forall x \in M \\ \theta_s \lambda(t) = e^{-ist}\lambda(t) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We weten echter ook uit stelling 3.18 dat we een alternatieve schrijfwijze voor θ_s hebben:

Als $s \mapsto \theta_s$ de duale aktie van $\mathbb{R}$ in N voorstelt dan kan θ_s ook op de volgende manier geschreven worden: $\forall s \in \mathbb{R},\ \forall y \in N$:

$$\theta_s(y) = \mu_s y \mu_s^{-1}$$

Waarbij μ_s een unitaire operator op $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ voorstelt die gegeven wordt door: $\forall \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(\mu_s \xi)(t) = e^{-ist}\xi(t)$$

Stelling 3.48 *Er bestaat een isomorfisme*

$$\kappa : N_0 \to N_1$$

zodat

$$\forall s \in \mathbb{R} :\ \kappa \circ \theta_s \circ \kappa^{-1} = \theta_s$$

en

$$\tau_1 = \tau_0 \circ \kappa^{-1}$$

Bewijs:

- **De constructie van het isomorfisme κ**
  In deze eerste stap van het bewijs gaan we een concrete formule geven voor het ismorfisme κ. We definiëren hiervoor eerst een unitaire operator u en tonen aan dat $\kappa(\,.\,) = u(\,.\,)u^*$ een isomorfisme tussen N_0 en N_1 zal vormen.

  We definiëren dus eerst de unitaire operator u op $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ als volgt:

  $$(u\xi)(t) = (D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\xi(t)$$

  Dit is een goed gedefinieerde operator want $(D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}$ is een unitaire operator in M en wertk dus op $\mathcal{H}$. Nu is ξ een element uit $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ dus $\xi(t) \in \mathcal{H}$. Dat u wel degelijk unitair is volgt omdat $(D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}$ unitair is want dat levert ons voor $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $t \in \mathbb{R}$:

  $$(u^*u\xi)(t) = (D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_{-t}(D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\xi(t) = \xi(t)$$

  Vervolgens tonen we aan dat κ de voortbrengers van N_0 op de voortbrengers van N_1 zal afbeelden, we tonen aan dat $\forall x \in M$ en $\forall s \in \mathbb{R}$:

  $$u\pi_0(x)u^* = \pi_1(x) \tag{3.13}$$
  $$u\lambda(s)u^* = \pi_1((D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_s)\lambda(s) \tag{3.14}$$

De gelijkheid (3.13) volgt omdat $\forall \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(u\pi_0 u^*\xi)(t) &= (D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\sigma^{\varphi_0}_{-t}(x)(D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_{-t}\xi(t) \\ &= \sigma^{\varphi_1}_{-t}(x)\xi(t)\end{aligned}$$

De vergelijking (3.14) bekomen we op de volgende manier, $\forall \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ en $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(u\lambda(s)u^*\xi)(t) &= (D\varphi_0 : D\varphi_1)^*_{-(t-s)}\xi(t-s) \\ &= (D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t} \\ &\quad \Big((D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\sigma^{\varphi_0}_{-t}\Big((D\varphi_1 : D\varphi_0)_s\Big)\Big)^*\xi(t-s) \\ &= (D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\sigma^{\varphi_0}_{-t}\Big((D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_s\Big) \\ &\quad (D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_{-t}\xi(t-s) \\ &= \Big(\sigma^{\varphi_1}_{-t}\Big((D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_s\Big)\lambda(s)\xi\Big)(t) \\ &= \pi_1\Big((D\varphi_1 : D\varphi_0)^*_s\Big)\lambda(s)\end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen 3.13 en 3.14 volgt dan dat κ, N_0 in N_1 zal afbeelden, omgekeerd zal dan ook κ^{-1}, N_1 naar N_0 sturen, en verkrijgen we dan dat de afbeeling een bijectie is, omdat nu κ door de som, produkt en hermitische toevoegeing schuift zal deze afbeelding κ een isomorfisme definiëren.

- $\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R} :\ \kappa \circ \theta_{\mathbf{s}} \circ \kappa^{-\mathbf{1}} = \theta_{\mathbf{s}}$
  We tonen eerst aan dat u commuteert met μ_s

$$\begin{aligned}(u\mu_s\xi)(t) &= u(e^{-ist}\xi(t)) \\ &= (D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}e^{-ist}\xi(t) \\ &= e^{-ist}(D\varphi_1 : D\varphi_0)_{-t}\xi(t) \\ &= (\mu_s u)(t)\end{aligned}$$

  Omdat we dit nu hebben zal dan ook κ commuteren met θ_s $\forall a \in N_0$:

$$\begin{aligned}\kappa \circ \theta_s \circ \kappa^{-1}(a) &= \kappa \circ \theta_s(u^*au) \\ &= \kappa(\mu_s u^* au\mu_s^{-1}) \\ &= \kappa(u^*\mu_s a\mu_s^{-1}u) \\ &= \kappa \circ \kappa^{-1}(\theta_s a) = \theta_s a\end{aligned}$$

- $\tau_{\mathbf{1}} = \tau_{\mathbf{0}} \circ \kappa^{-\mathbf{1}}$
  Noteren we met T_0 en T_1 de operatorwaardige gewichten, zoals we die in het begin gedefinieerd hebben. Omdat hier de identificatie $\pi_0(M) \cong M$ en $\pi_1(M) \cong M$ niet meer eenduidig is, moeten we de formule van T_0 en T_1 lichtjes wijzigen ten opzichte van hetgeen we vroeger gezien hebben. We verkrijgen dan voor elke $x \in (N_1)_+$:

$$T_1 x = \pi_1^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(x)ds\right)$$

en voor elke $x \in (N_0)_+$:

$$T_0 x = \pi_0^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(x) ds\right)$$

Omdat

$$\begin{aligned} T_1 x &= \pi_1^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(x) ds\right) \\ &= \pi_1^{-1}\left(\kappa\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(\kappa^{-1}(x)) ds\right)\right) \\ &= \pi_0^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s\left(\kappa^{-1}(x)\right) ds\right) \\ &= T_0(\kappa^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Bijgevolg krijgen we hetvolgende verband tussen de twee operatorwaardige gewichten:

$$T_1 = T_0 \circ \kappa^{-1}$$

Zo verkrijgen we dan ook dat voor een semi-eindig, normaal en trouw gewicht φ op M hetvolgende geldt:

$$\tilde{\varphi}^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(0)} \circ \kappa^{-1}$$

Waarbij $^{(0)}$ en $^{(1)}$ duidden op de duale gewichtsconstructie t.o.v. respectievelijk N_0 en N_1. In het bijzonder zal dan:

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)} = \tilde{\varphi}_1^{(0)} \circ \kappa^{-1}$$

Zo bekomen we dan de laatste gelijkheid, omdat $\forall t \in \mathbb{R}$, gebruikmakend van de eigenschappen uit de inleidende pragraaf (cfr propositie 3.6 en de opmerking voor 3.17) geldt dat:

$$\begin{aligned} \left(D\tilde{\varphi}_1^{(1)} : D(\tau_0 \circ \kappa^{-1})\right)_t &= \left(D(\tilde{\varphi_1}^{(0)} \circ \kappa^{-1}) : D(\tau_0 \circ \kappa^{-1})\right)_t \\ &= \kappa\left((D\tilde{\varphi}^{(0)} : D\tau_0)_t\right) \\ &= \kappa\left((D\tilde{\varphi}_1^{(0)} : D\tilde{\varphi}_0^{(0)})_t\right) \kappa\left((D\tilde{\varphi}_0^{(0)} : D\tau_0)_t\right) \\ &= \kappa\left(\pi_0\left((D\varphi_1 : D\varphi_0)_t\right)\right) \kappa\left(\lambda(t)\right) \\ &= \pi_1\left((D\varphi_1 : D\varphi_0)_t\right) \pi_1\left((D\varphi_1 : D\varphi_0)_t^*\right) \lambda(t) \\ &= \lambda(t) = (D\tilde{\varphi}_1 : D\tau_1)_t \end{aligned}$$

Dus zal

$$\tau_0 \circ \kappa^{-1} = \tau_1$$

■

Gevolg 3.49 *De afbeelding*

$$\kappa : N_0 \to N_1$$

kunnen we uitbreiden tot een topologisch *-isomorfisme:

$$\tilde{\kappa} : \tilde{N}_0 \to \tilde{N}_1$$

Bovendien verkrijgen we voor elke $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ dat

$$\tilde{\kappa}(N^{(0)}(\epsilon, \delta)) = N^{(1)}(\epsilon, \delta)$$

BEWIJS:

- We kunnen $\tilde{\kappa}$ op dezelfde manier als hierboven definiëren, d.w.z.

  $$\tilde{\kappa}(y) = uyu^*$$

  omdat nu $\tau_1 = \tau_0 \circ \kappa^{-1}$ zal $\tilde{\kappa}(y)$ τ_1-meetbaar zijn als en slechts als y τ_0 meetbaar is.

- Stel nu $a \in N_{(0)}(\epsilon, \delta)$ dan zal

  $$\tau_0 \left(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|)\right) \leq \delta$$

  als en slechts als

  $$\begin{aligned} \tau_0 \circ \tilde{\kappa}^{-1} \circ \tilde{\kappa} \left(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(|a|)\right) &\leq \delta \\ \tau_1 \left(\chi_{]\epsilon,+\infty[}(\tilde{\kappa}|a|)\right) &\leq \delta \end{aligned}$$

  Dus zal

  $$\tilde{\kappa} \left(N_{(0)}(\epsilon, \delta)\right) \subseteq N^1(\epsilon, \delta)$$

  De omgekeerde inclusie kan volledig analoog aangetoond worden, door gebruik te maken van het feit dat

  $$\tilde{\kappa}^{-1} : \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_0$$

  ook een topologisch isomorfisme definieert. ■

Merk op: We weten nu dat $\tilde{\kappa}$ een isomorfisme definieert tussen de twee topologische vectorruimten $\tilde{N}_1$ en $\tilde{N}_0$. Uit stelling 3.48 en het voorgaande gevolg volgt dat $\tilde{\kappa}$ ook een isomorfisme zal definiëren tussen de L^p-ruimten in $\tilde{N}_1$ en deze in $\tilde{N}_0$. We kunnen ons nu afvragen wat er met de toplogieën op de ruimten $\tilde{N}_1$ en $\tilde{N}_0$ zal gebeuren, het voorgaande gevolg vertelt ons dat $\tilde{\kappa}$ ook de topologieën zal bewaren. In het bijzonder zal ook $\tilde{\kappa}$ de norm tussen de de L^p-ruimten in $\tilde{N}_1$ en deze in $\tilde{N}_0$ bewaren.

Het maakt dus niet uit van welk gewicht we vertrekken, want we bekomen allemaal isomorfe $L^p(M)$-ruimten.

3.9 Het semi-eindige geval

In deze sectie gaan we de constructie die we hier beschreven hebben toepassen op een semi-eindige von Neumann-algebra , dat wil in feite zeggen dat er op deze von Neumann-algebra een spoor gaat bestaan. Omdat de bekomen L^p-ruimte onafhankelijk is van het gekozen gewicht, waarvan we vertrekken, kunnen we evenzeer met dit spoor werken, dat gaat voor een sterke vereenvoudiging van de opbouw zorgen, zoals we zullen zien.

3.9.1 Het gekruiste produkt

We werken vanaf nu met M als von Neumann-algebra , en daarop het semi-eindige, normale en trouw spoor τ_0. Omdat τ_0 een spoor is zal de modulaire automorfisme groep triviaal worden dus

$$\sigma_t^{\tau_0} = id$$

Bijgevolg zal de aktie van $\pi(x)$ op $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ gegeven worden door

$$\begin{aligned} (\pi(x)\xi)(t) &= \sigma_{-t}^{\tau_0}(x)\xi(t) \\ &= x\xi(t) \end{aligned}$$

Omdat de aktie van $x \in M$ op $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ nu onafhankelijk geworden is van t kunnen we wanneer we $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ identificeren met $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes \mathcal{H}$ (zie hiervoor [29]) de aktie van $x \in M$ op een elementaire tensor $f \otimes \xi$ uit $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes \mathcal{H}$ op volgende wijze schrijven:

$$(1 \otimes x)(f \otimes \xi) = f \otimes x\xi$$

Analoog verkrijgen we voor de werking van $\lambda(t)$ op $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes \mathcal{H}$ de volgende vorm: Stel $f \otimes \xi$ opnieuw als elementaire tensor, d.w.z. $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ en $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} (\lambda(t) \otimes 1)(f \otimes \xi) &= \lambda(t)f \otimes \xi \\ &= f(\,.\,-t) \otimes \xi \end{aligned}$$

Bijgevolg wordt het gekruiste produkt voortgebracht door de volgende operatoren: $(1 \otimes x), (\lambda(t) \otimes 1)$ op $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes \mathcal{H}$ voor $x \in M$, $s \in \mathbb{R}$.

We kunnen deze laatste von Neumann-algebra echter vereenvoudigen door $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ met zichzelf te identificeren na fourier transformatie:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mu) &\to L^2(\mathbb{R}, \mu) \\ f(x) &\mapsto (\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx \end{aligned}$$

met inverse:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}, \mu) &\to L^2(\mathbb{R}, \mu) \\ \hat{f}(\omega) &\mapsto (\hat{\mathcal{F}}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Deze twee laatste operatoren gaan in het bijzonder unitair zijn dat komt erop neer dat $\mathcal{F}\hat{\mathcal{F}} = 1 = \hat{\mathcal{F}}\mathcal{F}$.

We willen nu de aktie van $\lambda(t)$ weten na deze transformatie, deze wordt gegeven door te vermenigvuldigen met $e^{i\omega t}$. Het volgende diagramma gaat dus commuteren:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, \mu) & \xleftarrow{\hat{\mathcal{F}}} & L^2(\mathbb{R}, \mu) \\ \big\downarrow \lambda(t) & & \big\downarrow T_{e^{i\omega t}} \\ L^2(\mathbb{R}, \mu) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}, \mu) \end{array}$$

want:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}\lambda(t)\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\left(\lambda(t)\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\left(\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(x-t)\,dx\end{aligned}$$

Dan voeren we nu de volgende substitutie door: $y = x - t$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(y+t)}\left(\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(y)\,dy\\ &= e^{i\omega t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y}\left(\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(y)\,dy\\ &= e^{i\omega t}\left(\mathcal{F}\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(\omega) = e^{i\omega t}\xi(\omega)\end{aligned}$$

Lemma 3.50 *De von Neumann-algebra voortgebracht door de vermenigvuldigingsoperatoren geassocieerd aan de volgende verzameling*

$$span\{e^{i\omega t}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

zal de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ over de Hilbertruimte $L^2(\mathbb{R},\mu)$ zijn.

Merk op:
Met span bedoelen we de vectorruimte opgespannen door deze vectoren.

Bewijs:
We gaan aantonen dat de commutant van

$$S = span\{e^{i\omega t}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

gegeven wordt door $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$. Uit de resultaten van hoofdstuk 1 weten we dan dat $S'' = L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ en bijgevolg is de von Neumann-algebra voortgebracht door S gelijk aan de von Neumann-algebra $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$.

- Dat $S' \supseteq L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ is duidelijk, want

  $$\forall f\in L^\infty(\mathbb{R},\mu)\ :\ f(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}f(\omega)$$

- Om de inclusie $S' \subseteq L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ aan te tonen, tonen we aan dat elke $a\in S'$ met een begrensde vermenigvuldigingsoperator kan geïdentificeerd worden. We tonen enkel aan dat a op $L^2(K,\mu)$ met $K\subseteq\mathbb{R}$ en $\mu(K) < +\infty$ zal samenvallen met zo'n begrensde. Als a op $L^2(K,\mu)$ met zo'n begrensde vermenigvuldigingsoperator te identificeren valt, zal dat ook op gans $L^2(\mathbb{R},\mu)$ gelden, om deze laatste uitbreiding aan te tonen kunnen we analoog het laatste geval van stelling (1.30) overnemen, we gaan deze uitbreiding hier dus niet opnieuw construeren maar verwijzen enkel naar de stelling 1.30.

  Omdat $1\in L^2(K,\mu)$ kunnen we a op 1 laten werken. Stel $g = a(1)$ dan zal $g\in L^2(K,\mu)$, bovendien zal T_g op gans $span\{e^{i\omega t}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ met de operator a samenvallen. Want

  $$\begin{aligned}a(e^{i\omega t}) &= aT_{e^{i\omega t}}(1)\\ &= T_{e^{i\omega t}}a(1)\\ &= e^{i\omega t}g\end{aligned}$$

Omdat nu $span\{e^{i\omega t} \mid t \in \mathbb{R}\}$ uniform dicht ligt in $L^\infty(K,\mu)$ op K zal voor elke functie f uit $L^\infty(K,\mu)$ er een rij van functies $(f_n)_n$ uit $span\{e^{i\omega t} \mid t \in \mathbb{R}\}$ bestaan die uniform naar f zullen streven, in het bijzonder verkrijgen we dan:

$$\|(T_g - a)f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|(T_g - a)f_n\|_2 = 0$$

We weten nu dat de operator a op gans $L^\infty(K,\mu)$ met de vermenigvuldigingsoperator T_g zal samenvallen, analoog als in hoofdstuk 1 zie stelling 1.30 kunnen we dan afleiden dat g begrensd zal zijn. Omdat nu ook $L^\infty(K,\mu)$ dicht ligt in $L^2(K,\mu)$ zal a op gans $L^2(K,\mu)$ samenvallen met die vermenigvuldigingsoperator T_g. De rest volgt dan uit stelling 1.30. ■

Wegens de trivialisatie van de modulaire automorfisme groep, kunnen we de werking van $\pi(x)$ op $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}) = L^2(\mathbb{R},\mu) \otimes \mathcal{H}$ als een tensor schrijven namelijk: Voor $f(\omega) \in L^2(\mathbb{R},\mu)$ en $\xi \in \mathcal{H}$:

$$(1 \otimes x)(f(\omega) \otimes \xi) = f(\omega) \otimes x\xi$$

Evenzo kunnen we dan de werking van de operatoren $\lambda(t)$ (na de fouriertransformatie) dan schrijven als een tensorprodukt, namelijk:

$$(\lambda(s) \otimes 1)(f(\omega) \otimes \xi) = e^{i\omega s} f(\omega) \otimes \xi$$

Met deze twee vormen voor de generatoren $\lambda(s)$ en x kunnen we het gekruiste produkt dus zien als een tensorprodukt van de von Neumann-algebras $L^\infty(X,\mu)$ en M.

$$R(M,\sigma_t^\tau) = L^\infty(\mathbb{R},\mu) \otimes M$$

3.9.2 De duale aktie θ

Omdat we in het vorig stuk met de fouriertransformatie gewerkt hebben moeten we dus ook hier θ_s gaan aanpassen. De aktie van θ_s na fouriertransformatie zal gegeven worden door de verschuivingsoperator $l(s)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

$$l(s)e^{i\omega t} = e^{i(\omega - s)t}$$

want

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}\theta_s\lambda(t)\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\theta_s\lambda(t)\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{-ist} \left(\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(x-t)\, dx \\
&= e^{-ist}\, e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y} \left(\hat{F}\xi\right)(y)\, dy \\
&= e^{it(\omega - s)} \left(\mathcal{F}\hat{\mathcal{F}}\xi\right)(\omega) \\
&= \left(l(s)e^{-i\omega t}\right)\xi(\omega)
\end{aligned}$$

Dus wanneer we θ_s gaan opsplitsen volgens het tensorprodukt, verkrijgen we $(x \in M,$ $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu))$

$$\theta_s(x \otimes f) = x \otimes l(s)f$$

Meer algemeen gaat θ_s op een operator y uit $M \otimes L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ een nieuwe operator van de volgende vorm geven:

$$\theta_s y = (1 \otimes l(s))\, y\, (1 \otimes l(s)^*)$$

Merk hierbij nog kort op dat θ_s op operatoren uit $M \otimes L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ werkt en $l(s)$ is een verschuivingsoperator op reële functies.

3.9.3 Het spoor τ

Nu hebben we voldoende gegevens om het spoor τ_0 op het gekruiste produkt te kunnen vinden. Ook hier gaan we het spoor τ als een tensor proberen te schrijven. We vermelden eerst het resultaat en daarna de weg die we gevolgd hebben om tot dit spoor te komen. τ blijkt van de volgende vorm te zullen zijn:

$$\tau = \tau_0 \otimes \int . \, d\omega$$

1. Eerst en vooral gaan we $\tilde{\tau}_0$ zoeken we weten uit het begin van dit hoofdstuk dat dit op deze manier gedefinieerd wordt:

   $$\tilde{\tau}_0 = \hat{\tau}_0 \circ T$$

   Waarbij $Tx = \int_{\mathbb{R}} \theta_s ds$ Met onze voorkennis van de werking van T en het feit dat Tx in $\hat{M}_+$ zal zitten bekomen we dan hetvolgende, voor elke elementaire tensor $x \otimes f \in M \otimes L^\infty(\mathbb{R})$

   $$\begin{aligned} T(x \otimes f) &= \int_{\mathbb{R}} (x \otimes l(s) f) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(x \otimes f(. - s) \Big) ds \\ &= x \, . \int_{\mathbb{R}} f(\omega) d\omega \end{aligned}$$

   Bijgevolg zal

   $$\tilde{\tau}_0(x \otimes f) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(\omega) d\omega \right) . \, \tau_0(x)$$

2. Nu weten we dat er in het begin van dit hoofdstuk vermeld stond dat er een spoor τ op $M \otimes L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ bestond dat door de volgende vergelijking gekarakteriseerd werd:

   $$(D\tilde{\tau}_0 : D\tau)_t = \lambda(t)$$

   Hieruit is natuurlijk helemaal niet duidelijk welke vorm τ zal hebben. Zonder het bewijs en de constructie helemaal na te gaan (cfr. [30, 31]) stoten we daar ook nog op de volgende eigenschap die eigen is aan dit spoor τ (cfr. ook paragraaf 3.3.1), namelijk dat

   $$\tilde{\tau}_0(\, . \,) = \tau(h \, . \,)$$

   met h positief en zelftoegevoegd en $h^{it} = \lambda(t)$. Met deze laatste gegevens hebben we voldoende, om τ terug te vinden want

   $$\lambda(t) = e^{i\omega t} = h^{it}$$

Dus zal $h = e^{\omega}$. Het is ook niet zo moeilijk om in te zien dat e^{ω} wel degelijk positief en zelftoegevoegd zal zijn. In het bijzonder verkrijgen we dan voor elke elementaire tensor $x \otimes f \in M \otimes L^{\infty}(\mathbb{R}, \mu)$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(x \otimes f) &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(\omega) d\omega \right) . \tau_0(x) \\ &= \tau(e^{\omega}(x \otimes f)) \\ &= \tau(x \otimes e^{\omega} f(\omega)) \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we dus afleiden dat τ van de volgende vorm zal zijn:

$$\tau = \tau_0 \otimes \int_{\mathbb{R}} . e^{-\omega} \, d\omega,$$

want zo wordt dan

$$\begin{aligned} \tau(e^{\omega}(x \otimes f)) &= \tau_0(x) . \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega} e^{\omega} f(\omega) d\omega \\ &= \tilde{\tau}_0(x \otimes f) \end{aligned}$$

3.9.4 De $L^p(M)$-ruimten

Nu we uiteindelijk het spoor τ op het gekruiste produkt gevonden hebben, rest er ons alleen nog de verzamelingen te zoeken die de $L^p(M)$-ruimten gaan definiëren, we doen dit zoals we ze in dit hoofdstuk, m.b.v de duale aktie gedefinieerd hebben.

We werken dus hier met de von Neumann-algebra

$$M \otimes L^{\infty}(\mathbb{R}, \mu)$$

over $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}, \mu)$ met daarop hetvolgende spoor:

$$\tau_0 \otimes e^{-\omega}$$

Uit de definitie van de $L^p(M)$ ruimten weten we dat ze gegeven wordt door de volgende vergelijking:

$$L^p(M) = \{a \in \tilde{N} \mid \theta_s(a) = e^{\frac{-s}{p}} a\}$$

Gebruikmakend van hetvolgende lemma, kunnen we deze vergelijking echter zeer sterk vereenvoudigen:

Lemma 3.51 *Zij y een gesloten operator geaffilieerd $M \otimes L^{\infty}(\mathbb{R}, \mu)$ zodanig dat voor $p > 0$ en $\forall s \in \mathbb{R}$*

$$\theta_s y = e^{-s/p} y$$

dan zal y van de volgende vorm zijn

$$y = x \otimes T_{./p}$$

met x als een gesloten operator geaffilieerd aan M en $T_{./p}$ stelt de vermenigvuldigingsoperator op $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ voor.

BEWIJS:
Eerst en vooral gaan we voor θ_s de andere schrijfwijze gebruiken d.w.z.

$$(1 \otimes l(s))\, y\, (1 \otimes l(s)^*) = e^{-s/p} y$$

dit voor elke $s \in \mathbb{R}$ waarbij $l(s)$ de verschuivingsoperator op $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ voorstelt dus voor $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ zal

$$(l(s)f)(\omega) = f(\omega - s)$$

Zij dan $y = u|y|$ de polaire decompositie van de operator y, met u als partiële isometrie met als initiale projectie, de projectie op $(kery)^\perp$ dan verkrijgen we

$$\begin{aligned}(1 \otimes l(s))y(1 \otimes l(s)^*) &= (1 \otimes l(s))u|y|(1 \otimes l(s)^*) \\ &= (1 \otimes l(s))u(1 \otimes l(s)^*)\,(1 \otimes l(s))|y|(1 \otimes l(s)^*) \\ &= u(e^{-s/p} y)\end{aligned}$$

wegens de uniciteit van de polaire decompositie verkrijgen we dan de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned}(1 \otimes l(s))u(1 \otimes l(s)^*) &= u \\ (1 \otimes l(s))|y|(1 \otimes l(s)^*) &= e^{-s/p} y\end{aligned}$$

Omdat de enige functies uit $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ die commuteren met elk translatie operator $l(s)$ met $s \in \mathbb{R}$ de scalaire functies zijn, zal u van de volgende vorm moeten zijn: $u = w \otimes 1$, waarbij w een partiële isometrie in M vormt.

Stel dan a als operator gelijk aan de vermenigvuldigingsoperator $T_{e^{\cdot/p}}$ dan is a een positief, zelftoegevoegde operator, geaffilieerd aan $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$. Omdat $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ commutatief is zullen de operatoren $1 \otimes a^{-1}$ en $|y|$ commuteren en zal dus de operator $1 \otimes a^{-1}|y|$ sluitbaar zijn. Noteer met z de sluiting van de operator $1 \otimes a^{-1}|y|$ In het bijzonder verkrijgen we dan als werking van θ_s op de operator z:

$$\begin{aligned}&(1 \otimes l(s))(1 \otimes a^{-1})|y|(1 \otimes l(s)^*) \\ = \;&(1 \otimes l(s))(1 \otimes a^{-1})(1 \otimes l(s)^*)(1 \otimes l(s))|y|(1 \otimes l(s)^*) \\ = \;&e^{s/p}(1 \otimes a^{-1})e^{-s/p}|y| = z\end{aligned}$$

Omdat dit voor z geldt gaat dat ook voor de spectrale projecties van z gelden, in het bijzonder gaan deze dan, om dezelfde reden dat hierboven u factoriseerde, ook factorizeren, en bijgevolg kunnen we dus z schrijven als een operator van de vorm: $z = b \otimes 1$, waarbij dus b een positief zelftoegevoegde operator geaffilieerd aan M gaat voorstellen. In het bijzonder zal dan $|y|$ van de volgende vorm zijn: $|y| = b \otimes a$.

Omdat dan nog enerzijds de sluiting van het bereik van $|y|$ gelijk zal zijn aan $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes sluiting(ran\, b)$ en anderzijds gelijk gaat zijn aan de initiale projectie van u die op haar beurt gelijk is aan $L^2(\mathbb{R}, \mu) \otimes$ initiale projectie van w. Verkrijgen we dat de initiale projectie van w gelijk gaat zijn aan de projectie op de sluiting van het bereik van de operator b. Stel dan de operator $c = wb$ dan is c een gesloten operator geaffilieerd aan M. en dan is de operator y zoals we moesten bewijzen van de vorm:

$$y = c \otimes a$$

waarbij a een vermenigvuldigingsoperator van de goede vorm voorstelt en c een gesloten dicht gedefinieerde operator is. ■

Uit het voorgaande lemma weten we dan dat een operator $a \in L^p(M)$ van de volgende vorm zal zijn:

$$a = x \otimes T_{\cdot/p}$$

met x als gesloten dicht gedefinieerde operator geaffilieerd aan M. Omdat deze operator a bovendien nog τ-meetbaar moet zijn, en het spoor τ volledig factorizeert moet dus de eerste component van a τ_0-meetbaar zijn en de tweede component moet meetbaar zijn t.o.v. de volgende maat $\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega} d\omega$. De laatste component van a is echter altijd van eenzelfde vaste vorm, we kunnen ons dan ook afvragen dat deze vermenigvulidigingsoperator, die duidelijk niet begrensd is wel meetbaar zal zijn t.o.v. die maat. Dit zal inderdaad zo zijn, want voor een willekeurig meetbare functie f met spectrale resolutie

$$T_{|f|} = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda dF(\lambda)$$

met $F(\Delta) = E(f^{-1}(\Delta))$ en $E(\delta) = T_{\chi_\Delta}$ geldt dat er een $\epsilon > 0$ bestaat waarvoor:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]\epsilon,+\infty[}(|f|) e^{-\omega} d\omega < +\infty$$

Dat komt omdat

$$\int_{\{|f|(x) \geq \epsilon\}} e^{\omega} d\omega \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\omega} < +\infty$$

Gebruikmakend van de eigenschappen gebruikt in het bewijs van lemma 3.32 verkrijgen we voor een operator $a \in L^p(M)$, omdat de operator factoriseert in zeg $a = x \otimes T_{e^{\cdot/p}}$ met $x \in \tilde{M}$ en omdat het spoor τ ook factoriseert volgende gelijkheden :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^p} \|a\|_p^p &= \tau(\chi_{]\epsilon^p,+\infty[}(|a|^p)) \\ &= \tau_0(\chi_{]\epsilon^p,+\infty[}(|x|^p) \int_{\mathbb{R}} \chi_{]\epsilon^p,+\infty[}(e^{\omega/p})\, e^{-\omega}\, d\omega \end{aligned}$$

Omdat de operator a tot $L^p(M)$ behoort zal zijn norm eindig zijn, en bijgevolg zal voor de operator x gelden dat

$$\tau_0(\chi_{]\epsilon^p,+\infty[}(|x|^p) < +\infty$$

Uit de eigenschappen gezien in hoofdstuk 2 volgt dan dat voor de operator x hetvolgende zal gelden:

$$\tau_0(|x|^p) < +\infty$$

Bijgevolg moet de operator uit $L^p(M, \tau_0)$ komen, deze laatste is de $L^p(M)$ ruimte zoals ze in hoofdstuk 2 kadert. We krijgen dus hetvolgende verband:

$$L^p(M) = L^p(M, \tau_0) \otimes \{\gamma e^{\frac{\omega}{p}} \,|\, \gamma \in \mathbb{C}\}$$

Om even terug te komen op het traditionele geval van de klassieke L^p-functieruimten. We zien we nu dat elke functie hier vermenigvuldigd gaat worden met een exponentiële functie, bijgevolg gaan de functies hier als ze tot een L^p-ruimte behoren ($p \in [1, +\infty[$), nooit begrensd zijn. Dit verklaart de ogenschijnlijke contradictie uit de opmerking na propositie 3.27.

3.10 Dualiteit

In deze allerlaatste paragraaf van deze verhandeling, dient nog een klein woord gezegd te worden over dualiteit. Vertrekkende van de stellingen die in de laatste paragraaf van hoofdstuk twee uit de doeken gedaan worden, kunnen we ons afvragen of er geen veralgemening van deze stelling, in de context van hoofdstuk 3 mogelijk is. Dit blijkt inderdaad mogelijk te zijn en we verkrijgen dan ook de volgende stelling:

Stelling 3.52 *Zij $p \in [1, +\infty[$, kies dan q zodanig dat $(1/p + 1/q = 1)$. Dan verkrijgen we de volgende twee belangrijke resultaten:*

i. Voor $a \in L^q(M)$ zal Φ_a gedefinieerd door

$$\Phi_a(b) = tr(ab)$$

voor $b \in L^p(M)$ een begrensde lineaire functionaal op $L^p(M)$ definiëren.

ii. De afbeelding

$$\begin{aligned} \Phi : L^q(M) &\rightarrow L^p(M)^* \\ a &\mapsto \Phi_a \end{aligned}$$

definieert een isometrisch isomorfisme van $L^q(M)$ naar de duale ruimte van $L^p(M)$.

Omdat we in het bewijs van deze stelling opnieuw de invoering van nieuwe begrippen en hun bewijzen nodig hebben, zoals Clarckson's ongelijkheid ([1], hfdst. 2, propositie 31), uniforme convexiteit van Banachruimten (cfr. [32]), reflexiviteit e.d. (cfr [32]) gaan we het bewijs niet geven. De bewijzen en belangrijke resultaten omtrent deze begrippen, zijn nodig om het bewijs van stelling 3.52 volledig te kunnen maken. Een deel van het bewijs kunnen we echter zo al aantonen, met onze beperkte voorkennis.

Bewijs:
Gebruikmakend van propositie 3.44 die zegt dat voor p en q toegevoegd geldt dat $\forall a \in L^q(M)$

$$\|a\|_q = \sup\left\{ |tr(ab)| \,\middle|\, b \in L^p(M), \|b\|_p \leq 1 \right\}$$

daaruit kunnen we afleiden dat

$$\begin{aligned} \|\Phi_a\|_\infty &= \sup\left\{ |\Phi_a(b)| \,\middle|\, b \in L^p(M),\ \|b\|_p \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ |tr(ab)| \,\middle|\, b \in L^p(M), \|b\|_p \leq 1 \right\} \\ &= \|a\|_q \end{aligned}$$

en bijgevolg zal de afbeelding

$$a \mapsto \Phi_a$$

een isometrie definiëren tussen $L^q(M)$ en een deelruimte van $L^p(M)^*$.

Als laatste zouden we dan in feite nog moeten aantonen dat de deelruimte van $L^p(M)$ waarmee $L^q(M)$ isomorf is gelijk zal zijn aan $L^p(M)$, zoals hoger reeds vermeld hebben we daar de invoering van andere begrippen voor nodig en we verwijzen dan ook naar ([1], Hfdst 2, Theorem 32) waar de rest van het bewijs gegeven wordt. ■

Nawoord

Hoewel het misschien niet de gewoonte is om na een wetenschappellijk werk nog een woordje te schrijven, ga ik het toch doen. Eerst en vooral hoop ik dat u het een boeiend en vooral leerrijk werk vond, want dat was bij mij zeker en vast het geval.

Maar als u mij nu de vraag zou zeggen dat ik tevreden ben met dit werk zal ik u een tweeledig antwoord moeten geven. Enerzijds wel omdat ik er zeer veel uit geleerd heb, daar waar ik de eerste maanden vooral bezig was met het verkennen van al die nieuwe begrippen, was ik na verloop van tijd toch al in staat om bewijzen zelf te construeren en te vervolledigen. Op dat vlak was het werk dus zeker en vast leerrijk, vooral omdat ik ook een voortdurende verwijzing naar het klassieke geval heb onderhouden, en omdat nu toch een beetje ingewijd ben in een tak van de wiskunde, die mij voorheen onbekend was.

Anderzijds, vind ik het spijtig dat ik mij soms heb moeten beperken bij de invoeging van nieuwe begrippen, want met mijn beperkte voorkennis zijn niet onmiddellijk alle dingen die vermeld staan evident. Op dat vlak vind ik het spijtig dat ik sommige bewijzen schuldig heb moeten blijven, omdat mijn basiskennis op sommige domeinen weinig tot onbestaande was.

Desalniettemin, heb ik dit werk graag gemaakt, ondanks het feit dat het mij soms veel zweet en moeite heeft gekost en ben ik er veel dingen uit wijzer geworden.

Raf

Bibliografie

[1] M. Terp: *L^p-spaces associated with von Neumann Algebras*, Kopenhagen, 1981.

[2] R. Roels: *Operatorwaardige gewichten op von Neumann Algebra's* , K.U.Leuven, 1997.

[3] J. Dixmier: *von Neumannalgebras*, North-Holland publishing company, Amsterdam 1981.

[4] M. Fannes: *Wiskundige Natuurkunde, cursusnota's*, K.U.Leuven, 1998.

[5] J. Quagebeur: *Operatorentheorie, cursusnota's*, K.U.Leuven.

[6] J.Quagebeur: *Maattheorie, cursusnota's*, K.U.Leuven, 1994

[7] J.Quagebeur: *Gekruiste produkten, inleiding*, K.U.Leuven.

[8] A. Van Daele: *von Neumann Algebra's, inleiding*, K.U.Leuven, 1994.

[9] A. Van Daele: *Functionaalanalyse, cursusnota's*, K.U.Leuven, 1994.

[10] M. Takesaki: *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, acta Math. 131, 1973, 249-308.

[11] U. Haagerup: *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras I.*, Mth. Scand. 43, 1978, 99-118.

[12] U. Haagerup: *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras II.*, Mth. Scand. 43, 1978, 119-140.

[13] U. Haagerup: *Operator valued weights in von Neumann Algebras I.*, J. Functional Analysis 32, 1979, 175-206.

[14] U. Haagerup: *Operator valued weights in von Neumann Algebras II.*, J. Functional Analysis 33, 1979, 339-361.

[15] A.Warrinier: *Algemene topologie, cursusnota's* K.U.Leuven, 1996.

[16] E. Nelson: *Notes on non-commutative integration* J. Functional analysis 15, 103-116, 1974.

[17] R. A. Kunze: *L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups* Trans. Amer. Math. Soc. 89, 519-540, 1958.

[18] U. Haagerup: *The standard form of von Neumann Algebras* Meth. Scand. 37, 271-283, 1975.

[19] A.Ooms: *Algebra I, cursusnota's* L.U.C., 1996.

[20] A. Ooms: *Algebra II, cursusnota's* L.U.C., 1996.

[21] W. F. Stinespring: *Integration theorems for gages and duality for unimodular groups* Trans. Amer. Math. Soc. 90, 15-26, 1959.

[22] I. E. Segal: *A non commutative extension of abstract integration* Ann. of Math. 57, 401-457, 1953.

[23] E. B. Davis: *One-parameter semigroups.* Academic Press, 1980

[24] F. I. Yeadon: *Convergence of measurable operators* Proc. Camb. Phil. Soc. 74, 257-268, 1973.

[25] F. I. Yeadon: *Non-commutative L^p-spaces* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77, 91-102, 1975.

[26] J. Dixmier: *Les algebres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[27] J.F.C. Kingman and S.J. Taylor: *Introduction to measure and probability* Camb. Univ. Press, 1966.

[28] M.E. Munroe: *Measure and integration* Addison Wesley, Pub. Comp., 1971.

[29] A. Van Daele: *Continuous crossed products and type III von Neumann algebras* Camb. Univ. Press, 1978.

[30] G.K. Pederson en M; Takesaki: *The Radon Nikodym theorem and von Neumann-algebra* Acta. Math. 130, 53-87, 1973.

[31] A. Connes *Sur le theoreme de Radon Nikodym, pour les poids normaux, fideles, semifinis*, Bull. Sci. Math. 97, 253-258,1973.

[32] K. Yosida *Functional Analysis*, second edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.